FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound a
A.M.N.H
1916

# NOVA ACTA
# ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

## TOMVS VIII.

5.06 (47.4) S3

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXC.



*PETROPOLI*
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCIV.

4/20/1916/ collated O.K.

r16.70305 April 28

# TABLE.

## HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXC.

Avec une Planche.

### HISTOIRE. Pag.


*Adjudication du Prix de Mathématique pure* - - 3.
*Nouvelles queſtions phyſico-mathématiques propoſées pour les Prix de 1793 & 1794* - - - - 5.
*Queſtion phyſico-chymique abandonnée* - - - 7.
*Obſervations aſtronomiques faites en Finlande pour déterminer la poſition géographique de Wilmanſtrand* ibid.
*Nouvel établiſſement pour former des traducteurs* - - 8.
*Epargne d'un capital permanent pour mettre le Gymnaſe académique ſur un meilleur pied* - - ibid.
*Cours publics* - - - - - ibid.
*Lettre de la Société des Scrutateurs de la Nature de Dantzig* - - - - - 9.
*Retour de l'éléve académique Zacharef* - - - ibid.
*Engagement de M. Hermann comme Académicien ordinaire* 10.

| | Pag. |
|---|---|
| *Gratifications* - - - - - - - - | 11. |
| *Promotions* - - - - - - | ibid. |
| *Depart de Mad. la Princeſſe de Daſchkaw, Directeur de l'Académie* - - - - | 12. |
| *Ouvrages publiés par l'Académie* - - - - - | ibid. |
| *Morts* - - - - - - | 13. |
| *Ouvrages, Machines & Inventions, Productions de la nature & de l'art, Antiquités & Curioſités, préſentés ou communiqués à l'Académie. Planche * qui ſe rapporte à la page* 19 - - - | 15. |
| *Obſervations aſtronomiques par M. Flaugergues à Viviers en Vivarais* - - - - - - - - | 27. |
| *Solution d'un Problème de Méchanique par le même. Tab. I. fig.* 8. - - - - - - - - | 31. |
| *Extrait de quelques lettres de M. le Baron de Paccaſſi, Correſpondant de l'Académie à Vienne, adreſſées dans le cours de cette année à M. l'Académicien Fuſs. Traduit de l'Allemand* - - - | 36. |
| EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce VIII. Volume des Actes.* | |
| *Claſſe de Mathématique & de Phyſico-Mathématique* | 47. |
| *Claſſe de Phyſique* - - - - - - - | 67. |
| *Claſſe d'Aſtronomie & de Météorologie* - - - | 79. |

NOVA

V.

# NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS VIII.

Cum VII. Tabulis aeri inciſis.

## MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.


| | Pag. |
|---|---|
| LEONH. EVLER. *Variae conſiderationes circa ſeries hypergeometricas* - - - - - - | 3. |
| —— —— *De vero valore formulae integralis* $\int \partial x (l\frac{1}{x})^n$ *a termino* $x = 0$ *usque ad terminum* $x = 1$ *extenſae* - - - - - - - - | 15. |
| —— —— *Plenior expoſitio ſerierum illarum memorabilium, quae ex unciis poteſtatum binomii formantur* | 32. |
| —— —— *Exercitatio analytica* - - - - - | 69. |
| —— —— *Evolutio Problematis, cuius Solutio analytica eſt difficillima, dum ſynthetica per ſe eſt obvia. Tab. I. fig.* 1 — 7 - - - - - - - | 73. |
| —— —— *Problema geometricum ob ſingularia ſymptomata imprimis memorabile. Tab. II. fig.* 1. 2. 3. | 87. |
| —— —— *De curvis hyperbolicis, quae intra ſuas asſymtotas ſpatium finitum includunt. Tab. II. fig.* 4. 5. | 116. |
| F. T. SCHVBERT. *De curſu nauis in Sphaeroide elliptico. Tab. III. fig.* 1. 2. 3. - - - - - | 140. |
| —— —— *Réflexions ſur les logarithmes imaginaires. Tab. III. fig.* 1*. 2*. 3*. 4*. - - - | 171. |
| NICOL. FVSS. *De nouis quibusdam cauſticae Parabolae proprietatibus. Tab. IV. fig.* 1. 2. 3. 4. | 182. |

Pag.

NICOL. FVSS. *Demonſtratio Theorematum quorundam analyticorum* - - - - - - - - 201.

WOLFG. LOUIS KRAFFT. *Sur les liſtes des mariages, des naiſſances & des morts à St. Pétersbourg; Mémoire troiſième contenant la période de* 1786 *jusqu'en* 1790 - - - - - 225.

NICOL. FVSS. *De motu ſingulari progreſſiuo et rotatorio corporis cylindrici, filo flexili, ex cuius altero termino ſuſpenditur, circumdati. Tab. V. fig.* 1. 2. 3. 4. - - - - - - - 256.

## PHYSICA.

CASP. FRIED. WOLFF. *Obſervationum de tela dicta celluloſa, continuatio ſecunda: Celluloſa muſculorum. Tab. VI. fig.* 1. 2. 3. 4. - - - 269.

B. F. J. HERMANN. *Expériences ſur le produit en fer de fonte d'un haut fourneau en Sibérie. Avec 6 Tables imprimées en feuilles & cottées. Tab.* 5. 6. 7. 8. 9. 10 - - - - - 287.

BASILE SEWERGUINE. *Obſervations ſur différentes eſpeces de pierres de roche compoſées roulées des environs du Canal de Ladoga* - - - - 301.

TOBIAS LOWITZ. *Diſſertationis de acidi aceti cryſtalliſatione. Continuatio, exhibens varias & recens detectas methodos* - - - - - - - 316.

C. F. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio X. De ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars II.* - - - - 347.

TO-

Pag.

TOBIAS LOWITZ. *Obſervationes circa ſalis communis cryſtalliſationem ope frigoris efficiendam, & depurandi ſalis huius methodus noua. Tab. IV. fig. 5. 6.* - - - - - - 364.

NICOLAS OZERETSKOVSKY. *Obſervation ſur les eaux martiales du Gouvernement d'Olonetz* - - 370.

## ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

STEPH. RVMOVSKI. *Obſeruationes nonnullae aſtronomicae Petropoli habitae* - - - - 379.

TOB. LOWITZ. *Déſcription d'un météore remarquable obſervé à St. Pétersbourg le 18 Juin 1790. Tab. VII.* - - - - - - 384.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1790 d'après le nouveau Stile* - - - - 389.

Errata.

# Errata.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pag. 6. | lin. 13. | loco | *amborum* | lege | *ambarum* |
| — 10. | — pen. | — | *habeat* | — | *habet* |
| — 18. | — 10 | — | $\int \frac{u^{m+n}\,\partial x}{\int u^{m}\,\partial x\,.\int u^{n}\,\partial x}$ | — | $\frac{\int u^{m+n}\,\partial x}{\int u^{m}\,\partial x\,.\int u^{n}\,\partial x}$ |
| — 19. | — 1 | — | $\nu - \lambda$ | — | $\nu \lessgtr \lambda$ |
| — 20. | — pen. | — | *iuuenimus* | — | *inuenimus* |
| — 36. | — 15. | — | $\frac{a}{1}$ | — | $\frac{1}{a}$ |
| — 84. | — 22. | — | *admmittat* | — | *admittat* |
| — 85. | — 8. | — | $Q\,\partial C$ | — | $R\,\partial C$ |
| — 90. | — 7. | — | O P | — | C P |
| — 104. | — 5. | — | *infinitæ* | — | *infinite* |
| — 109. | — 22. | — | *igit* | — | *igitur* |
| — 117. | — 13. | — | *ſymtomata* | — | *ſymptomata* |
| — 256. | — 4. | inferne deleatur *quisque* | | | |
| — 322. | — ult. | loco | *cryſtalliſabis* | lege | *cryſtalliſabilis* |
| — 327. | — 8. | — | *fuudum* | — | *fundum* |
| — 333. | — 7. | — | *pellucitate* | — | *pelluciditate* |
| — 336. | — 25. | — | *conſcentus* | — | *conſecutus* |
| — 366. | — 26. | — | *Fig.* 5 | — | *Fig.* 6 |

# HISTOIRE
DE
# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
# SCIENCES.

# HISTOIRE
# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
# DES SCIENCES
## ANNEE MDCCXC.

L'Académie Impériale des Sciences avoit propoſé en 1787 un Prix ſur un ſujet de Mathématique pure. Le terme du concours fut d'abord fixé jusqu'au 1 Juin 1789 & enſuite prolongé jusqu'à la fin de cette même année. La queſtion propoſée étoit énoncée en ces termes:

*Si les fonctions arbitraires, auxquelles on parvient par l'intégration des équations à trois ou pluſieurs variables, repréſentent des courbes ou ſurfaces quelconques, ſoit algébriques ou tranſcendantes, ſoit méchaniques, diſcontinües, ou produites par un mouvement volontaire de la main; ou ſi ces fonctions renferment ſeulement des courbes continues repréſentées par une équation algébrique ou tranſcendante?*

L'Académie ne reçut que trois réponſes déſignées comme il ſuit:

N°. 1. Mémoire écrit en allemand avec la déviſe: *Juvat graves componere lites.*

N°. 2. Mémoire ſur la nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, avec la déviſe: *Nulli quae ſubdita legi.*

N°. 3. De functionibus arbitrariis calculi integralis Diſſertio, avec la déviſe: *Sic vnum quidquid paulatim protrahit aetas in medium.* —— *Lucret. v.* 1387.

Mrs. les Commiſſaires nommés pour examiner ces trois pieces furent unanimément d'accord que la ſeconde, avec la déviſe: *Nulli quae ſubdita legi*, diſcute avec beaucoup de juſteſſe & de pénétration le ſujet propoſé, & qu'elle mérite le prix. Quant à la piece latine avec la déviſe: *Sic vnum quidquid paulatim protrahit aetas in medium*, dont le réſultat eſt d'accord avec celui de la piece françoiſe, on ne lui a trouvé d'autre défaut que celui d'être trop abſtraite, l'Auteur n'ayant pas jugé à propos de développer ſuffiſamment ſes idées. Cependant comme elle eſt très digne d'éloges, il fut décidé de lui accorder les honneurs de l'acceſſit.

L'Académie en ayant fait ſon rapport à ſon illuſtre chef, S. A. Madame la Princeſſe de Daſchkaw fixa la publication de cette adjudication au 29 Novembre, & ayant convoqué pour ce jour une aſſemblée extraordinaire, à laquelle furent invités tous les membres honoraires, ainſi que les académiciens ordinaires & les adjoints, Madame la Princeſſe ordonna que le Secrétaire ouvrit le billet cacheté qui s'étoit trouvé joint à la piece victorieuſe. Ce qui étant fait, on

on y trouva le nom de l'auteur, M. Arbogaſt Profeſſeur de Mathématique à Colmar en Alſace.

Le billet de la piece qui a mérité l'acceſſit, fut dépoſé aux archives, jusqu'à ce qu'il plut à ſon auteur de ſe nommer, & l'Académie a appris dans la ſuite que c'eſt M. Antoine-Marie de Lorgna, Colonel des Ingénieurs au ſervice de la Republique de Veniſe, & Profeſſeur de Mathématique à l'École militaire de Verone, Aſſocié externe de l'Académie depuis 1776. Quant au billet de la piece allemande No. I. comme elle n'a point ſatisfait à la queſtion de l'Académie, il fut brulé en préſence de toute l'aſſemblée.

Après cet acte de publication, Mrs. les Académiciens Krafft, Fuſs & Schubert propoſérent chacun & lurent des nouvelles queſtions phyſico-mathématiques, pour être ſoumiſes au choix de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, laquelle en ayant trouvé deux également intéreſſantes, elle décida que l'une & l'autre fuſſent propoſées à la fois pour les prix de deux années conſécutives. L'Académie publia en conſéquence de cette déciſion un nouveau programme, qui fut imprimé & diſtribué le 10 Février 1791. Ces queſtions ſont

I. Pour l'année 1793.

Donner une théorie plus parfaite que celles qui exiſtent jusqu'à préſent, de la pouſſée des terres & de la force qu'elle exerce contre les revêtemens de maçonnerie. Développer mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici les principes phyſiques relatifs à cet objet, & les conſéquences de la théorie qui réſultent de la ténacité des terres, de leur diverſe humidité, auſſi bien que de la cohéſion & de la fermeté des matieres employées pour les revêtemens, en rapportant des expériences &

des obſervations pratiques, faites ou à faire, d'où l'on puiſſe déduire des hypothèſes, qui s'accordent mieux avec la nature que celles, dont on a fait uſage jusqu'à préſent.

II. Pour l'année 1794.

D'après les obſervations de l'aiguille magnétique, tant anciennes que modernes, définir l'état magnétique de notre globe terraqué; c'eſt à dire, fixer les poſitions des pôles magnétiques de la terre, calculer leurs forces, leurs mouvemens, & en déduire, pour le commencement du 19$^e$ ſiecle, une carte magnétique de la terre, conforme aux obſervations faites en terre ferme & ſur mer, & ſemblable à celle qu'Edmund Halley a conſtruite pour le commencement du 18$^e$ ſiecle; enſuite de la comparaiſon de ces deux cartes, & d'autres encore, s'il en exiſte qui ſoient dignes d'attention, déduire toutes les loix qui concernent les méridiens magnétiques & les variations, que toutes ces lignes, leurs courbures & fléchiſſures doivent éprouver par la ſucceſſion des temps, en formant des concluſions qui ſoient d'accord avec les expériences, & en les appliquant aux uſages nautiques.

Les pieces rélatives aux queſtions de ces deux années doivent être envoyées au concours avant le 1$^{er}$ Janvier de l'année pour laquelle elles ſont deſtinées. Chaque Prix eſt de cent Ducats d'Hollande en eſpéces, & les conditions d'ailleurs réquiſes ſont ſuffiſament indiquées dans toutes les feuilles périodiques, ainſi que dans les programmes que l'Académie publie annuellement.

L'Académie s'étoit encore engagée par un programme extraordinaire publié le 3 Novembre 1788, d'adjuger un Prix de

de cinquante Ducats que M. le Comte Apollos de Mouſſin-Pouſchkin avoit dépoſés & promis à celui qui auroit le mieux réſolu le Problème Phyſico-chymique ſuivant:

Déterminer par une ſuite d'expériences, quel eſt le rôle que les airs factices, ou l'électricité, ou encore ces airs factices combinés avec l'électricité, jouent dans la minéraliſation, & conſtater par ces expériences, ſi le principe électrique contient un véritable phlogiſtique ou non?

Les mémoires devoient être envoyés au concours avant le 1[er] Juin de l'année 1790: mais comme ce terme échû l'Académie n'avoit encore reçu aucune réponſe à cette question, M. le Comte de Mouſſin-Pouſchkin jugea à propos de la retirer entièrement, & d'employer ſon prix à l'encouragement d'un jeune Phyſicien qui aura le plus contribué à l'avancement & aux progrés des connoiſſances Phyſico-chymiques.

Le Général Major d'Artillerie & Chevalier Euler, que ſon devoir appelloit au commencement de cette année en Finlande, avoit prié Madame la Princeſſe de Daſchkaw de lui accorder quelques uns des inſtrumens aſtronomiques ſurnuméraires qui ſe trouvent à l'Obſervatoire de l'Académie, pour pouvoir déterminer pendant le ſéjour qu'il feroit dans ce Gouvernement, la poſition géographique des lieux les plus notables & les plus importans qui s'y trouvent. Madame la Princeſſe & toute l'Académie acquieſcerent avec empreſſement à cette démande. M. Euler partit en conſéquence muni d'une bonne pendule ainſi que de tous les inſtrumens néceſſaires pour faire de pareilles obſervations, & l'Académie reçut déja de lui le 27 Mai un journal des obſervations, qu'il avoit faites avec ſoin à Wilmanſtrand,

ſtrand, & dont il fut fait uſage enſuite au département géographique. Mais la guerre ſurvenue en Finlande empecha le Général Euler de continuer ſes obſervations, pour déterminer encore d'autres poſitions, & l'obligea de renvoyer les inſtrumens.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw enviſageant la néceſſité de former des traducteurs ſuffiſamment verſés en toutes les Sciences, pour inſtruire & éclairer la nation par des bons ouvrages traduits dans la langue du païs & répandre ainſi toutes les connoiſſances utiles parmi les perſonnes qui n'entendent pas les langues étrangeres, elle établit au commencement de cette année un nouvel Inſtitut, où les jeunes élèves ſortis du Gymnaſe académique puſſent ſe perfectionner & s'exercer dans de bonnes traductions. Elle munit cet Inſtitut d'un réglement conforme à ſon but & en confia la Direction à M. le Conſeiller de Cour Protaſſof.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant, par ſon économie, épargné une ſomme de 40000 roubles, elle obtint de Sa Majeſté l'Impératrice la permiſſion, de placer cet argent à la banque Imperiale en capital permanent, dont les interèts doivent être deſtinés à aggrandir le Gymnaſe & à le mettre ſur un meilleur pied.

Les cours publics que Mrs. les Académiciens de la nation donnerent pendant les mois d'été, eurent encore cette année-ci tout le ſuccès que Madame la Princeſſe de Daſchkaw s'en étoit promis en les établiſſant. M. le Conſeiller de Cour Kotelnikov enſeigna les mathématiques, M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski l'hiſtoire naturelle, & M. le Conſeiller de Cour Socolof la chymie expérimentale. Les deux premiers donne-

donnerent leurs leçons dans le grande ſalle du Gymnaſe, & le dernier dans le laboratoire chymique. Tous les trois eurent la ſatisfaction d'avoir un nombreux Auditoire.

L'Académie reçut au mois d'Août une lettre de la Société phyſique de Dantzig, datée du 2 de ce mois, qui mande que, feu M. le Docteur de Wolff lui ayant legué non ſeulement un obſervatoire aſtronomique très bien fourni en toutes ſortes d'inſtrumens, mais encore un capital ſuffiſant pour l'entretien & l'augmentation de ces inſtrumens, ainſi que pour le ſalaire d'un aſtronome, ſous condition que la Société pour engager un aſtronome s'adreſſat à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg & à trois autres Académies voiſines: la Société, pour ſe conformer aux voeux & à cette derniere volonté de ſon généreux Teſtateur, prie l'Académie de lui indiquer un ſujet verſé en cette Science, à qui elle pût offrir la nouvelle place d'Aſtronome. L'Académie lui fit répondre qu'elle ne connoît actuellement en Ruſſie aucun aſtronome habile, qui ne fut déja employé, ou qui voulut s'expatrier, mais qu'elle ne doute pas que les autres Académies, celles de Stockholm & de Berlin en particulier, ne lui en trouvent qui puiſſent occuper cette place avec honneur, aſſurant au reſte la Société, qu'elle prend un vive part à la réuſſite de ſa récherche & qu'elle fait de voeux ſincères pour que le choix tombe ſur quelqu'un qui rempliſſe dignement ſes vües.

M. Zacharof, éléve de l'Académie & un de ceux qui avoient été envoyés à l'univerſité de Göttingue, en revint vers le commencement de cette année & préſenta pour être ſoumis au jugement de l'Académie: *Specimen chemicum de differentia et affinitate acidi nitroſi cum aliis corporibus*: Mrs. les Aca-

Académiciens Pallas, Géorgi, & Socoloff, ayant été nommés pour examiner cet écrit, ils en firent un rapport favorable, & recommendérent ce jeune chymiſte à la bienveuillance de Mad. la Princeſſe de Daſchkaw, pour être encouragé & employé à l'Académie.

M. le Conſeiller de Cour Hermann, aſſocié penſionaire de l'Académie, établi en Perme, où il eſt Directeur de la fabrique d'acier à Pyſchminsk près de Yecathérinenbourg, s'étant rendu à St. Pétersbourg où ſes affaires l'appelloient, Madame la Princeſſe de Daſchkaw, pour recompenſer les ſoins qu'il a eu de communiquer à l'Académie ſes obſervations & recherches minéralogiques, le nomma Académicien ordinaire & le fit introduire en cette qualité dans la ſéance académique du 11 Février, où il lut un mémoire ſur la manière dont on fait l'acier des mines de fer de la Sibérie, inſéré au Tome VI$^{e}$ de ces nouveaux Actes. Comme la minéralogie demande que celui qui la cultive, ſoit à portée de profiter des traveaux de la métallurgie qui ſe pratiquent aux minières en grand, Madame la Princeſſe de Daſchkaw conſentit que M. Hermann, en acceptant la place d'Académicien ordinaire qui lui a été offerte, puiſſe retourner & ſéjourner en Sibérie auſſi longtemps que la direction qui lui y eſt confiee par des Ordres particuliers de Sa Majeſté l'exige. Elle l'encouragea d'y continuer ſes obſervations ſur les montagnes & leurs minières & de les communiquer à l'Académie, lui aſſurant au reſte la continuation de ſa penſion académique & lui promettant en outre une gratification annuelle, ſi les envois qu'il fera pour le Cabinet d'hiſtoire naturelle de l'Académie feront conſidérables. Enfin il fut arreté, que depuis le jour qu'il ſera de retour à St. Pétersbourg, pour s'y domicilier, la penſion & la gratification ne pouvant plus avoir lieu alors, il commencera

cera à toucher les appointemens d'Académicien ordinaire fixés par le réglement.

Le 1 Mars, Madame la Princeſſe de Daſchkaw donna à M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter à Moſcou une gratification de deux cent roubles, qui lui ſera continuée annuellement en recompenſe des mémoires précieux qu'il fournit pour la Bibliothéque ancienne ruſſe.

De même à M. Kreſtinin, Correſpondant de l'Académie & citoyen d'Archangel, pour avoir enrichi cette même Bibliothèque ainſi que le Journal académique publié en langue ruſſe ſous le tître: Новыя Ежемѣсячныя Сочиненїя, de divers articles intéreſſans, une gratification de cent roubles, avec l'expectance à la premiere penſion académique, qui deviendra vacante.

Le 3 de Mai: en conſidération de la recommandation de Mrs. les Académiciens, & nommément de Mrs. Pallas, Géorgi & Socoloff, comme il a été dit ci-deſſus, Madame la Princeſſe de Daſchkaw nomma M. Jacques Zacharof, Adjoint de l'Académie pour la chymie, & le fit introduire en cette qualité à la ſéance académique le 24 du même mois.

Le 17 Mai, M. l'Apoticaire Lowitz n'ayant joui jusqu'à préſent que de la demi-penſion académique de cent roubles, Madame la Princeſſe de Daſchkaw pour recompenſer ſon aſſiduité & l'encourager encore d'avantage à pourſuivre ſes découvertes chymiques, trouva bon de le gratifier de la penſion académique entiere, c'eſt à dire de deux cent roubles. Le 7 Octobre elle le propoſa à l'Académie pour être nommé Adjoint en chymie, avec les appointemens ordinaires, & M.

 Lo-

Lowitz fut reçu unanimément en cette qualité. Le 18 du même mois il fut introduit à la Séance académique & y prit place.

La penſion vacante par cette promotion fut là deſſûs accordée par Madame la Princeſſe de Daſchkaw à M. le Correſpondant Kreſtinin à Archangel.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit encore cette année-ci une abſence de quelques mois pour ſe rendre à ſes terres, où ſes affaires domeſtiques l'appelloient. Après avoir en attendant partagé l'adminiſtration des affaires de l'Académie entre ſes divers départemens, elle partit le 26 Juin & revint en Octobre.

L'Académie publia dans le cours de cette année:

Noua Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tome VI$^e$. qui comprend 25 mémoires de Mathématiques & de Phyſique, avec l'hiſtoire de l'année 1788, ſuivie de trois mémoires étrangers.

Le troiſieme volume de la traduction ruſſe de l'hiſtoire naturelle du Comte de Buffon: Исторїя Естественная Графа де Бюффона.

Le ſixieme volume de l'ancienne Bibliotheque ruſſe: Продолженїе древней Россїйской Вивлїоѳики.

Le ſixieme volume des annales du R. P. Nicon: Руская лѣтопись по Никоновскому списку.

Le ſecond volume du Dictionaire de l'Académie Impériale Ruſſe: Словарь Россїйской Академїи.

Les

Les Tomes V et VI. de la collection des articles divers qui ont été imprimés dans les différentes ſortes d'almanachs que l'Académie publie: Собранїе сочиненїй выбранныхъ изъ Мѣсяцослововъ на разные годы.

Outre pluſieurs traductions & ouvrages pour l'inſtruction & l'utilité de la nation.

L'Académie fit en cette année pluſieurs pertes, que nous allons encore indiquer ici ſuivant l'ordre chronologique.

M. Jean Hyacinthe de Magellan, Gentilhomme Portugais, domicilié à Londres, de la Société Royale des Sciences de Londres, Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris & membre de celle de Berlin: il fut reçu Aſſocié externe le 13 Octobre 1778, & obtint la penſion académique en 1783. Mort à Islington en Angleterre le 27 Janvier.

M. Jacques André Mallet, Citoyen de Genève & Profeſſeur d'aſtronomie: En 1768 l'Académie l'invita à venir faire l'obſervation du paſſage de la Planète Venus devant le disque du Soleil, & il ſe rendit pour cet effet en 1769 à Ponoï en Lapponie. Reçu au nombre des aſſociés externes le 29 Décembre 1776: décedé à Genève le 13 Février.

M. Jean Jacques Ferber, Conſeiller ſupérieur des mines & Membre ordinaire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe. Madame la Princeſſe de Daſchkaw l'engagea en 1784 comme Académicien ordinaire en Minéralogie. Il prit ſon congé en 1786 & fut gratifié en 1787 de la penſion académique de 200 roubles: il entra enſuite au ſervice de S. M. le Roi de Pruſſe qui le nomma Con-

ſeiller ſupérieur des mines & Académicien ordinaire de ſon Académie des Sciences & Belles-Lettres à Berlin. Il fit divers voyages minéralogiques & mourut à Berne le 6 Avril, dans ſa 47 année, ayant été né à Carlscrone le 29 Août 1748.

M. Benjamin Francklin à Philadelphie: Membre des principales Académies de l'Europe & fondateur de celle de l'Amerique: reçu au nombre des Aſſociés externes le 2 Novembre 1789, & décedé le 6 Avril., dans ſa 86 année.

M. Jean Geſner, Chanoine & Profeſſeur de Mathématiques à Zuric en Suiſſe: membre de pluſieurs Académies: reçu au nombre des aſſociés externes le 5 Mars 1764. Mort le 25 Avril, dans ſa 81^e^ année.

M. Michel Gollovin, Conſeiller de Cour: Elève de l'Académie & diſciple du célébre Mathématicien Leonhard Euler. Après avoir été Adjoint ordinaire en Mathématiques depuis 1775, il quitta l'Académie en 1786 & s'engagea comme Profeſſeur de l'École nationale. Il mourut le 8 Juin.

M. Pierre Jonas Bergius, Docteur en Medécine, Profeſſeur d'Hiſtoire naturelle & de Pharmacie, Aſſeſſeur du College Royal de Medécine à Stockholm & Membre de pluſieurs Académies. Il fut reçu au nombre des Aſſociés externes le 29 Décembre 1776 & mourut à Stockholm le 29 Juin agé de 60 ans.

Le Prince Tſcherbatov, Conſeiller privé, Senateur & Chambellan-actuel. Préſident du Collège des Finances & Chevalier de l'Ordre de Ste. Anne. On a de lui une Hiſtoire de Ruſſie en ſept Tomes faiſant 15 volumes in 4^to^. Il fut reçu au nombre des Aſſociés honoraires le 29 Décembre 1776, & muorut à Moscou le 12 Décembre 1790.

OU-

# OUVRAGES,

## Machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou communiqués à l'Académie, l'année 1790.

Le Lundi 7 Janvier, Madame la Princeſſe de Daſchkaw, dirigeant l'Académie, a envoyé huit belles & grandes pieces de différentes mines de cuivre, qui ſe trouvent dans les minières de Pogodiaſchin à l'Oural de Verchoturie, dont elle a fait préſent au Cabinet académique.

M. Le Conſeiller de Cour & Chevalier Euler, Secrétaire perpétuel des Conférences académiques, a lu une lettre adreſſée à Mrs. de l'Académie, par M. Achard, Directeur de la Claſſe de Phyſique expérimentale de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, datée de Berlin le 16 Décembre 1789. Ce ſavant chymiſte envoie ſon ouvrage intitulé *Recherches ſur les propriétés des alliages métalliques*, & anonce une *Botanique tinctoriale*, qu'il a entrepriſe, & de laquelle il continuera de s'occuper, s'il peut ſe promettre l'approbation & le ſuffrage de l'Académie. Le Secrétaire a été chargé de remercier M. Achard de ſon préſent ainſi que de ſes offres, en l'aſſurant que l'Académie a toujours fait un grand cas de ſes recherches chymiques, & qu'elle ne recevra pas moins favorablement celles qu'il lui promet.

Le 11 Janvier, M. le Conſeiller de Collèges & Chevalier Pallas a remis pour la Bibliotheque un exemplaire de

la

la ſuite du vocabulaire polyglotte publié par Orde de Sa Majeſté l'Impératrice: *Linguarum totius orbis vocabularia comparatiua, AVGVSTISSIMAE cura collecta. Sectionis primae linguas Europae et Aſiae complexae, Pars ſecunda.*

Le même Académicien a préſenté le commencement du manuſcrit du ſecond volume des voyages du défunt Académicien Güldenſtädt.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk le 12 Décembre 1789, qui envoie les obſervations météorologiques que ſon fils a faites à Tigiga dans le Gouvernement d'Irkoutzk, avec un extrait de ſa lettre qui contient quelques détails ſur la pèche des balaines près de Tſcheiwytka, & ſur les nations Tſchuktſches & Koraikes.

M. l'Académicien Zoujef a expoſé, avec une déſcription méthodique, une belle collection de ſables de diverſes couleurs, à demi pétrifiés & coupés en tablettes, qui ſe trouvent dans une montagne près de Bogorodtzk, dans le Gouvernement de Toula, & dont il fait préſent au Cabinet de l'Académie.

Le 25 Janvier. M. le Prof. Géorgi a communiqué une lettre de M. de Morveau, Avocat Général honoraire au Parlement de Dijon, datée du 7 Octobre, qui lui envoie pour être préſenté à l'Académie & dépoſé à ſa Bibliotheque: *Mémoire de nomenclature chimique propoſée par Mrs. de Morveau Lavoiſier, Bertholet & Fourcroit, avec un nouveau Syſtème de caractères chimiques adaptés à cette nomenclature, par Mrs. Haſſenfratz & Adet*; un volume in $8^{vo}$.

Le

Le 11 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé ſept pieces de minéraux & foſſiles avec leurs étiquettes, dont elle a fait préſent au Cabinet de l'Académie.

Le 18 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a communiqué une lettre de M. Herſchel datée de Slough près de Windſor du 25 Janvier, qui remercie l'Académie de l'avoir reçu au nombre de ſes membres externes.

Le Secrétaire a lu une lettre du R. P. Joſeph Coſtantia, datée de Verceil le 23 Janvier & addreſſée à Meſſieurs de l'Académie: il y donne une notice de ſes ouvrages en partie publiés & en partie prèts à paroître au jour, entre lesquels ſe trouve un traité de l'influence des planètes ſur la terre, qui ne mérite aucune attention.

Le 22 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Chirurgien Major Fries datée d'Ouſtiug-vélikoi le 20 Janvier, qui envoie des extraits des obſervations météorologiques faites à Ouſtiug en 1787, 1788 & 1789 réduites en formes de tables.

Le 25 Février. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Hacquet adreſſée à l'Académie & datée de Léopol le 1 Octobre 1789, qui envoie le IV$^{e}$ & dernier volume de ſon Oryctographie Carniolienne, ainſi que le 1$^{e}$ volume de la nouvelle collection des mémoires de la Société rurale à Lublana dont il eſt le Secrétaire, publiés l'un & l'autre en allemand & intitulés, comme il ſuit:

1.) Oryctographia carniolica oder phyſikaliſche Erdbeſchreibung des Herzogthums Krain 4$^{ter}$ Theil 1789 4$^{to}$.

2.) Neue Sammlung nützlicher Unterrichte herausgegeben von der Geſellſchafft des Ackerbaues im Herzogthum Krain, 4^to^ 1 Theil Laybach 1779.

L'Académie a reçu ce préſent avec remercimens.

Le 1 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

1.) Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences: Année 1786 avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

1.) Connoiſſance des temps à l'uſage des Aſtronomes & des Navigateurs pour l'année commune 1791.

& de la part des auteurs, Mrs. Rozier, Mongez le jeune, & de la Métherie: *Obſervations ſur la Phyſique ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts.* Année 1788. Juin — Décembre, en tout ſept Cahiers.

M. le Conſeiller de Cour Hermann a diſtribué une annonce: *Nachricht für die Freunde der Mineralogie*, dans laquelle il offre aux amateurs de la Minéralogie, par voie de prénumeration, une collection de plus de cent pieces de roches diverſes de l'Oural.

Le 8 Mars. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. l'Aſſeſſeur Kielow, Agent de la Ruſſie à Augsbourg, qui envoie de la part du Méchanicien Stöſchel, pour être préſenté à l'Académie: *Nachricht von dem Katoptriſchen Zirckel, als eine Zugabe zu Hrn. Branders Beſchreibung des Spiegelquadranten.*

Le

Le 8 Mars. Il a auſſi préſenté & diſtribué à Mrs. les Académiciens, de la part de M. Gülich à Pforzheim, pluſieurs exemplaires de l'annonce du 5<sup>e</sup> volume de ſon ouvrage ſur les couleurs, qui aura pour titre: *Gründliche Vorſchrifften Tuſche von allen möglichen Farben zu machen, und ſolche nicht nur zur Mahlerey, ſondern auch zur Druckerey und Färberey auf Kottum, Leinwand, Seyden, Papier, Leder, Holtz, Bein und Federn nützlich anzuwenden.*

Le 15 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Grand-Chambellan de Schouvalof le 12<sup>me</sup> volume des mémoires de Pierre le Grand: Дѣянїя Петра Великаго.

Le 1 Avril. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté la continuation de la déſcription des animaux marins de l'Océan Septentrional, envoiée par M. Fomin d'Archangel. Cette déſcription a été inſérée dans le Journal de l'Académie Новыя Ежемѣсячныя Сочиненїя.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a communiqué & lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkutzk' le 16 Janvier, qui envoie avec une courte notice deux deſſins d'une tête de Rhinoceros foſſile ſans machoire inférieure, qu'on a trouvée à une profondeur de 4 toiſes, à Graninofstſchina, village ſitué ſur le chemin de Yakoutzk' à 30 verſtes d'Irkoutzk' & à une diſtance à peu près égale du fleuve Angara. La gravure de cette tête foſſile ſe trouve à la ſuite de cette Hiſtoire. Table *.

Le 8 Avril; le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Mrs. les Académiciens par M. de St. Maz au palais épiscopal

de St. Dié en Lorraine, datée du 17 Mars, qui donne avis de la vente d'une Bibliothèque des plus précieuſes en manuſcripts & éditions très rares, où ſe trouve entr'autres un manuſcript des Commentaires de Jules Céſar en 400 feuilles *in folio* très bien conſervé & enrichi de beaucoup de figures qui repréſentent les guerres de ſon temps.

M. le Conſeiller de Collèges Roumovski a lu une lettre de M. Mechain, datée de Paris le 13 Décembre 1789, qui communique diverſes nouvelles aſtronomiques, entr'autres les dernieres obſervations des immerſions & émerſions des Satellites de Jupiter, & une détermination plus exacte des temps de revolution du 6$^{me}$ & 7$^{me}$ Satellite de Saturne.

Le 19 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoié avec un catalogue, diverſes pierres précieuſes, cryſtalliſations, agates, cornalines, ainſi que des oeufs, des cocos de mer & autres productions de la nature, dont M. le Chevalier de Britto, Vice-Admiral de la flotte portugaiſe a fait préſent au muſée académique.

Le 22 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre pour la Bibliothèque académique un exemplaire relié de la ſeconde partie du Tome I. de la Flora Roſſica. La 1$^{re}$ partie avoit été préſentée le 17 Janvier 1785. Voyez le Tome III. des *Noua Acta*, Partie hiſtorique pag. 25.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Apoticaire Lowitz: *Experimentorum chemicorum de Carbonibus eorumque proprietatibus et vſibus variis continuatio*, inſéré dans la partie hiſtorique des Noua Acta Tom. VI. pag. 57.

Le

Le 3 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur pour être placé à la Bibliothèque académique. *Grammaire turque d'une toute nouvelle méthode, pour apprendre cette langue en peu de ſemaines avec un vocabulaire enrichi d'anecdotes utiles & agréables, dédié à S. M. l'Impératrice, par M. Preindt.* 8$^{vo}$ *à Berlin* 1790.

Le 17 Mai. M. l'Académicien Fuſs a préſenté de la part de l'auteur, M. Pfaff, Prof. de Mathématiques à Helmſtädt: *Summations - Methode nebſt andern damit zuſammenhängenden analytiſchen Bemerkungen*, imprimé en 8$^{vo}$.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 20 Mars, qui envoie une carte de l'isle de Japon, deſſinée par le marchand Japonois Da-i-ko-kù kov-da. Cette carte diffère en pluſieurs points de celle de Kämpfer, & les détails en ſont plus exacts. À cet envoi furent joints trois paquets de ſémences pour le jardin botanique.

Le 24 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre de la part de M. le Comte de Caſſini: *Extrait des obſervations aſtronomiques & phyſiques faites par Ordre de Sa Majeſté* (le Roi de France) *à l'Obſervatoire royal, en l'année* 1788.

Le 27 Mai. Le Secrétaire a préſenté le journal des obſervations aſtronomiques faites à Wilmanſtrandt en Finlande, par M. le General-Major d'Artillerie Euler. Voyés ci-deſſus pag. 7.

Le 21 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 18 Avril, qui envoie les obſervations thermomètriques, que ſon fils,

le Juge-Provincial, a faites à Guijiguirsk pendant le dernier ſemeſtre de 1789.

Le 5 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Apoticaire Lowitz: *Materia alba in epidermide Betulae albae recens detecta & examini chemico ſubiecta.* Cet écrit a été inſeré dans le 6$^{me}$ Tome des *Noua Acta*, partie hiſtorique pag. 48.

Le 23 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prince Beloſelski, Chambellan actuel & Miniſtre plénipotentiaire de S. M. l'Impératrice à Turin. *Dianyologie ou tableau philoſophique de l'entendement, in 8$^{vo}$ à Dresden* 1790.

Le 6 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une lettre de M. Caſanova, Bibliothécaire de M. le Comte de Waldſtein, réſident à Dux en Bohème, qui ſoumet à l'approbation de l'Académie une feuille imprimée contenant des recherches ſur le Problème de la duplication du cube.

Enſuite une lettre de M. Flaugergues de Viviers en Vivarais, qui envoie pour être ſoumis à l'examen de l'Académie, 1. *Quelques obſervations aſtronomiques faites dans ces dernieres années à Viviers*, en manuſcrit. 2. *La Solution d'un Problème de Méchanique*, auſſi en manuſcrit & 3. Un mémoire imprimé *ſur le mouvement & la figure des Ondes.* Les deux premiers manuſcrits ſe trouvent inſerés à la ſuite de cette hiſtoire.

Le 9 Septembre. M. l'Académicien Géorgi a remis & lu l'extrait d'une lettre reçue de M. le Conſeiller des mines Crell à Helmſtädt, datée du $\frac{2}{20}$ Août 1790, concernant la découverte de M. de Ruprecht, qui pretend avoir retiré par des

des procédés chymiques des vrais régules métalliques de pluſieurs terres, d'où M. Crell croît pouvoir conjecturer, que toute terre eſt de nature métallique, ou qu'il n'y a proprement plus de terres.

Le 30 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a remis de la part de S. E. Mr. le Comte Besbarodko un coffre cacheté & adreſſé à l'Académie, qui s'eſt trouvé contenir: Six pieces quarrées d'habillemens uſités aux isles Aléoutes, artiſtement tiſſûs d'une laine très fine & entrelaſſés des courroies de peau de loutre. Enſuite un ſac tiſſû de paille, dans lequel ſe trouve un image peinte ſur du bois, une autre ſur du cuir, un idole de fer & trois monnoyes eſpagnoles d'argent, enfilées à des rubans. Le tout des isles Aléoutes & envoyé par ordre de S. M. l'Impératrice, pour être dépoſé au Muſée académique.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Lamey, datée de Mannheim le 14 Août, qui envoie de la part de l'Académie Electorale Palatine des Sciences & Belles-Lettres, dont il eſt le Secrétaire perpétuel: *Hiſtoria et Commentationes Academiae Electoralis Scientiarum et elegantiorum litterarum Theodoro - Palatinae Tom. VI.* en deux volumes, dont le premier contient les mémoires de Phyſique & l'autre ceux de l'Hiſtoire. Enſuite le nouveau Programme des prix propoſés par cette Académie pour l'année 1791, & une brochure in 8$^{vo}$ intitulée *Rémarques ſur une diſſertation de M. Monnet, ſur les montagnes & les terreins à mines en général.*

Le 11 Octobre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société Electorale météorologique de Mannheim, le huitième volu-

volume de ſa collection intitulée: *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni* 1788. 4$^{to}$.

Le 21 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé en préſent pour être depoſé au cabinet d'Hiſtoire naturelle, deux coquilles qu'elle a apportées de Smolensk & dans lesquelles doivent s'engendrer des perles: enſuite deux phioles, avec des ceriſes quadruples & doubles à une ſeule tige conſervées dans de l'eſprit de vin, que lui a préſenté M. le Colonel de Bohl, qui aſſure avoir des cériſiers, où ces monſtruoſités ſont fort communes.

Le 28 Octobre. Le Secrétaire a remis une lettre imprimée de M. le Docteur en Médecine Vizcayno, adreſſée au Préſident & aux membres de l'Académie & datée de Complutum ou Alcala de Henares en Eſpagne le 13 Septembre, qui envoie une diſſertation de ſa façon, imprimée ſous le tître *Praelectio academica ſimpliciores & ſalubriores comprehendens de febribus notiones* 4$^{to}$ *Compluti* 1790.

Le 1 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur M. le Baron de Mohrenheim 1.) *Wieneriſche Beyträge zur practiſchen Arzneykunde, Wund-Arzney-Kunſt und Geburthshülfe, Deſſau* 1782. deux volumes in 8$^{vo}$. 2.) *Beobachtungen verſchiedener chirurgiſcher Vorfälle, Deſſau* 1783. deux volumes in 8$^{vo}$.

Le 15 Novembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part du Correſpondant, M. Kreſtinin à Archangel: Чертежъ Ежегодныхъ Историческихъ записокъ служащихъ основанїемъ къ продолженїю Исторїи города Архангельскаго отъ 1780 года. M. Kreſtinin annonce dans

dans ce plan une hiſtoire d'Archangel depuis l'année 1584 jusqu'en 1780, à laquelle il travaille, & qu'il ſe propoſe d'envoyer à l'Académie.

Le 29 Novembre. Aſſemblée convocquée pour la publication de l'adjudication du Prix de Mathématique. Voyez ci-deſſus, p. 4.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie de Toulouſe: *Hiſtoire & Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Inſcriptions & Belles-Lettres de Toulouſe. Tom. I. II. III.* trois volumes in $4^{to}$.

Le 2 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hermann, datée de Cathérinenbourg le 27 Octobre, qui envoie avec ſa diſſertation, imprimée au VII^e Tome des *Noua Acta* pag. 302. une caiſſe contenant deux échantillons du Schoerl rouge, qu'on trouve à Sarapoulskoi, dont les uns ſont taillés & polis en facettes, & les autres crus.

Le 20 Décembre. M. l'Académicien Krafft a lu une lettre de M. Dsivovitſch, Secrétaire du Lieutenant-Général Comte de Balmain, datée de la fortereſſe de St. George ſur la ligne Caucaſe du 22 Avril, qui communique quelques notices des monts Caucaſes, dont le plus haut eſt appellé l'Elbrouſſe, & particulierement de la montagne nommée Swiſtoun (Свистунъ) ou le ſiffleur, qui eſt une eſpèce de Baromètre indiquant le bon & le mauvais temps par un ſifflement moins ou plus fort.

Le 23 Décembre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a rapporté avoir reçu des lettres de Tobolsk', qui

apprennent, que ſur une plaine à ſept verſtes de là ſe trouve une caverne profonde, laquelle depuis peu a commencé à jetter du feu: qu'une pareille éruption s'eſt auſſi manifeſtée ſur une colline dans la voiſinage, & qu'on a envoyé à Tobolsk' des cendres qui ont été ramaſſées autour de ces nouveaux volcans.

Le Secrétaire a continué de préſenter chaque mois les obſervations météorologiques que M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter a faites à Moscou, pendant le cours de l'année.

OB-

# OBSERVATIONS aſtronomiques.

Par
M. *FLAUGERGUES*,
à Viviers en Vivarais.

Ces obſervations ont été faites à un obſervatoire ſitué dans le Fauxbourg St. Jacques de la ville de Viviers, capitale du Vivarais. La latitude de cet Obſervatoire eſt de 44°. 29′. 6″. & ſa longitude de 2°. 20′. 50″. à l'eſt du méridien de l'Obſervatoire de Paris. J'ai employé pour ces obſervations un téleſcope Grégorien de ſeize pouces de longueur, groſſiſſant environ quarante fois, & une excellente pendule reglée par des hauteurs correſpondantes du ſoleil, priſes avec un Sextant à lunette de trois pieds de rayon.

## I.

Obſervation du paſſage de Mercure au devant du Soleil le 3 May 1786.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Contact intérieur de la ſortie à - | 20$^h$. 45′. 22″. |
| Contact extérieur à - - - | 20. 48. 29. |

 II.

## II.

Obſervation de l'occultation de Jupiter par la Lune, le 29 Octobre 1787.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Immerſion du premier bord à - - | $21^h. 22'. 11''$. |
| Immerſion du ſecond bord à - - | 21. 23. 12. |

## III.

Obſervation de l'occultation de l'étoile 2 $\alpha$, à la ſerre auſtrale de l'écreviſſe, par la Lune, le 11 May 1788.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Immerſion à - - - - - | $10^h. 5'. 36$. |

## IV.

Obſervation de l'éclipſe de Soleil, du 3 Juin 1788.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Commencement de l'éclipſe à - - | $19^h. 26'. 36''$. |
| Immerſion de la tâche A à - - - | 19. 31. 38. |
| Immerſion du milieu de la tâche B à - | 19. 34. 30. |
| Immerſion du milieu de la tâche C à - | 19. 35. 5. |
| Immerſion du milieu de la tâche D à - | 20. 30. 22. |
| Emerſion du milieu de la tâche A à - | 20. 31. 30. |
| Emerſion du milieu de la tâche B à - | 20. 36. 10. |
| Emerſion du milieu de la tâche C à - | 20. 37. 13. |
| Emerſion du milieu de la tâche D à - | 21. 17. 30. |
| Fin de l'écliPſe à - - - - | 21. 25. 41. |

## V.

Obſervation de l'occultation de 18, par la Lune, le 18 Octobre 1788.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Emerſion à - - - - - | $11^h. 46'. 29''$. |

VI.

## VI.

Obſervations des Phaſes de l'anneau de Saturne, pendant l'année 1789.

| | |
|---|---|
| Premiere diſparition - - | Entre le 5 & le 7 May. |
| Premiere réapparition - - | Le 28 Aouſt à $10^h. \frac{1}{2}$ ſoir |
| Seconde diſparition - - | Le 6 Octobre |
| Seconde réapparition - - | Le 29 Janvier 1790, à $6^h. \frac{1}{4}$ ſoir |

## VII.

Obſervation de l'éclipſe de Lune, du 2 Novembre 1789.

| Tems vray. | |
|---|---|
| À $11^h. 48'. 30''$. | Tout Schikardus dans l'ombre. |
| 12. 3. 31. | L'ombre touche Tycho. |
| 12. 5. 15. | L'ombre à mare humorum. |
| 12. 51. 55. | L'ombre à mare foecunditatis. |
| 12. 57. 2. | Tout Petavius dans l'ombre. |
| 12. 58. 26. | Mare humorum hors de l'ombre. |
| 13. 11. 50. | Capuanus hors de l'ombre. |
| 13. 25. 29. | Tycho hors de l'ombre. |
| 13. 27. 6. | Mare nectaris hors de l'ombre. |

## VIII.

Obſervation du paſſage de Mercure ſur le disque du Soleil, le 5 Novembre 1789.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Premiere apparence de ☿ ſur le ☉ à - - | $1^h. 27'. 3''$. |
| Contact intérieur à - - - - | 1. 28. 40. |

## IX.

Obſervation de l'occultation de $\kappa$ ♎, par la Lune, le 5 Mars 1790.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Immerſion à - - - - - | $17^h. 58'. 31''$. |

## X.

Obſervation de l'occultation de $\beta$ ♏, par la Lune, le 2 Avril 1790.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Emerſion à - - - - - - | $11^h. 30'. 28''$. |

## XI.

Obſervation de l'éclipſe de Lune du 28 Avril 1790.

| | Tems vray. |
|---|---|
| Commencement de l'éclipſe à - - | $10^h. 27'. 59''$. |
| Immerſion totale à - - - - | 11. 26. 16. |
| Commencement de l'émerſion à - - - | 13. 3. 36. |
| Fin de l'éclipſe à - - - - | 14. 0. 43. |

SO-

# SOLUTION D'UN PROBLÈME de Méchanique.

Par le même.

Déterminer la nature de la courbe, que décrit un corps qui eſt mû horizontalement par l'action d'une force accélératrice conſtante & ſoulevé en même tems par une force décroiſſante, dans un milieu qui réſiſte comme le quarré de la vîteſſe.

## Solution.

Soit AB la courbe cherchée, & la droite horizontale AD ſon axe. Ayant mené les deux ordonnées infiniment proches PM & $p\,m$, perpendiculaires à cette ligne AD, ſoit tirée du point M la perpendiculaire M $r$ ſur la ligne $p\,m$. Soit priſe enſuite ſur la ligne PM prolongée, la partie ME pour repréſenter la force accélératrice ſimple verticale, & ſoit décompoſée cette force ME en deux autres MF, MG, l'une dirigée ſuivant le petit côté M $m$ de la courbe AB, & l'autre perpendiculaire à cette même direction, ou dirigée ſuivant la normale au point M. Pareillement par le point M ſoit menée la ligne horizontale MH, pour repréſenter la force accélératrice conſtante qui agit dans ce ſens, & ſoit décompoſée cette force en deux autres MI, MK, la premiere dirigée ſuivant le petit côté M $m$ de la courbe & l'autre ſuivant la Tab. I. Fig. 8.

nor-

normale au point M. Cela fait nommons A P, $x$, P M, $y$, & l'arc A M, $s$; nous aurons $Mr = Pp = \partial x$, $rm = \partial y$, $Mm = \partial s$: nommons de plus $\pi$, la force accélératrice conſtante qui pouſſe horizontalement le corps, $\Phi$ l'éffort de la force verticale au point M, $n$ l'intenſité de la réſiſtance & enfin $v$ la viteſſe, avec laquelle le corps parcourt le petit côté M $m$, de la courbe A B.

Cela poſé, les triangles ſemblables $Mrm$, EFM donneront les proportions

$Mm : mr :: ME : MF$ & $Mm : Mr :: ME : EF (= MG)$, ou
$\partial s : \partial y :: \Phi : MF = \frac{\Phi \partial y}{\partial s}$ & $\partial s ; \partial x :: \Phi : MG = \frac{\Phi \partial x}{\partial s}$,

donc l'effort de la force $\Phi$ au point M, pour pouſſer le corps ſuivant M $m$, eſt égal à $\frac{\Phi \partial y}{\partial s}$, & l'effort de la force $\Phi$, perpendiculaire à cette direction, ou à la courbe au point M, eſt égal à $\frac{\Phi \partial x}{\partial s}$.

Pareillement les triangles ſemblables $Mrm$, MIH donnent les proportions

$Mm : Mr :: MH : MI$ & $Mm : mr :: MH : IH (= MK)$, ou
$\partial s : \partial x :: \pi : MI = \frac{\partial x}{\partial s}$ & $\partial s : \partial y :: \pi : MK = \frac{\pi \partial y}{\partial s}$,

donc l'effort de la force $\pi$ au point M, pour pouſſer le corps ſuivant M$m$, eſt égal à $\frac{\pi \partial x}{\partial s}$, & l'éffort de la même force perpendiculairement à cette courbe à ce point eſt égal à $\frac{\pi \partial y}{\partial s}$.

Il eſt évident que les deux forces M I & M F agiſſent dans le même ſens, par conſéquent la force accélératrice, par laquelle le corps eſt pouſſé ſuivant M$m$, eſt égale à la ſomme de ces deux forces, moins la reſiſtance que le corps éprouve

de

de la part du milieu, laquelle réſiſtance eſt égale, par l'hypothèſe, à $n v^2$, donc la force accélératrice ſuivant M $m$ eſt égale a $\frac{\Phi \partial y}{\partial s} + \frac{\pi \partial x}{\partial s} - n v^2$. On aura donc, par le principe des forces accélératrices, l'équation

$$\left(\frac{\Phi \partial y}{\partial s} + \frac{\pi \partial x}{\partial s} - n v^2\right) . \partial s = v \partial v, \text{ ou}$$

$$2 v \partial v = 2 \Phi \partial y + 2 \pi \partial x - 2 n v v \partial s.$$

Puiſque par l'hypothèſe la force M E diminue continuellement, tandis que la force M H eſt conſtante, la courbe A B eſt concave à l'égard de l'axe. De plus les forces normales M G, M K agiſſant dans des ſens oppoſés, la réſultante de ces forces eſt égale à leur différence, & comme cette réſultante doit fair équilibre à la force centrifuge du corps, elle doit agir dans le ſens M K, & être, par conſéquent, égale à M K — M G, ou à $\frac{\pi \partial y}{\partial s} - \frac{\pi \partial x}{\partial s}$. On aura donc l'équation $\frac{\pi \partial y}{\partial s} - \frac{\Phi \partial x}{\partial s} = \frac{v^2}{\frac{\partial s^3}{-\partial x \partial \partial y}}$, d'où l'on tire

$$v^2 = \frac{\Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial y \partial s^2}{\partial x \partial \partial y}.$$

Si l'on différencie cette équation, on aura

$$2 v \partial v = - \frac{2 \Phi \partial s . \partial \partial s}{\partial \partial y} + \frac{\partial \Phi . \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\Phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2}$$
$$+ \frac{2 \pi \partial y \partial s . \partial \partial s}{\partial x \partial \partial y} + \frac{\pi \partial s^2 \partial \partial y}{\partial x \partial \partial y} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2},$$

ou en reduiſant

$$2 v \partial v = 2 \Phi \partial y + \frac{\partial \Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\Phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2} - \frac{2 \pi \partial y^2}{\partial x}$$
$$+ \frac{\pi \partial s^2}{\partial x} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2}.$$

Égalant cette valeur de $2 v \partial v$ avec celle que donne le principe des forces accélératrices, & ſubſtituant pour $v^2$ ſa valeur

$\frac{\Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial y \partial s^2}{\partial x \partial \partial y}$, on aura, toute reduction faite, l'équation

$$\frac{\partial \Phi \partial s^2}{\partial \partial y} - \frac{\Phi \partial s^2 \partial^3 y}{\partial \partial y^2} - \frac{\pi \partial s^2}{\partial x} + \frac{\pi \partial y \partial s^2 \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y^2} = - \frac{2 n \Phi \partial s^3}{\partial \partial y} + \frac{2 n \pi \partial y \partial s^3}{\partial x \partial \partial y}.$$

Diviſant chaque terme de cette équation par $\partial s^2$ & le multipliant par $\partial \partial y$, elle deviendra

$$\partial \Phi - \frac{\Phi \partial^3 y}{\partial \partial y} - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x} + \frac{\pi \partial y . \partial^3 y}{\partial x \partial \partial y} = - 2 n \Phi \partial s + \frac{2 n \pi \partial y}{\partial x} \partial s,$$

ou bien

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \partial y} = \frac{\partial \Phi - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x}}{\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}} + 2 n \partial s.$$

Or $\partial \Phi - \frac{\pi \partial \partial y}{\partial x}$ eſt la différentielle de $\Phi - \frac{\pi \partial y}{\partial x}$ (en ſuppoſant $\partial x$ conſtante). Integrant donc cette équation, elle deviendra

$$\log. \partial \partial y = \log. (\Phi - \tfrac{\pi \partial y}{\partial x}) + 2 n s + \log. c.$$

Multipliant le terme $2 n s$ par log. $h$ ($h$ étant le nombre dont le logarithme eſt $= 1$) & mettant, pour la conſtante $c$, la quantité $f \partial x^2$, afin que l'équation ſoit homogène en différentielles, l'équation précédente ſe changera en celle-ci :

$$\log. \partial \partial y = \log. (\Phi - \tfrac{\pi \partial y}{\partial x}) + 2 n s . \log. h + \log. f \partial x^2,$$

qui, en repaſſant aux nombres, ſe change en celle-ci:

$$\partial \partial y = (\Phi - \tfrac{\pi \partial y}{\partial x}) . h^{2 n s} f \partial x^2,$$

& cette équation

$$\partial \partial y = (\Phi - \tfrac{\pi \partial y}{\partial x}) . h^{2 n s} . f \partial x^2,$$

eſt l'équation différentielle qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps, & qu'il falloit déterminer.

J'ai

J'ai trouvé une méthode pour trouver, au moyen des ſuites infinies, une équation de la courbe précédente exprimée en termes finis; mais cette méthode eſt trop longue pour pouvoir être rapportée ici. Je la reſerve pour un Mémoire que je me propoſe d'avoir l'honneur de préſenter à l'Académie Impériale de Pétersbourg, ſi ce foible eſſai a le bonheur de lui plaire.

# EXTRAIT

de quelques lettres de M. le Baron de *Paccaſſi*, Correſpondant de l'Académie à Vienne, adreſſées dans le cours de cette année à M. l'Académicien *Fuſs*.

(Traduit de l'Allemand.).

Ayant été occupé depuis quelque temps de la Théorie des Comètes, je ſuis tombé ſur une méthode très commode de déterminer, par des eſſais, l'orbite d'une comète, & je vais vous la communiquer en abrêgé.

I.

Soit T le tems entre la premiere & la troiſième obſervation, C une quantité conſtante dont le logarithme eſt $= 0,7564990$, & il y a

$$2 \log. T + \log. C = \log. A.$$

II.

Je nomme les rayons vecteurs R, R′, R″, & la corde entre deux obſervations K, & il y aura pour toute orbite parabolique

$$(R + R'') K^2 - \frac{K^4}{12 (R + R'')} = A.$$

Le ſecond membre de cette équation pourra être négligé communément dans les calculs de la premiere poſition.

III.

## III.

Ainſi, en prenant $R + R'' = s$, à volonté, & exprimant le tems T en minutes, pour avoir A (ſelon §. I.) on trouvera la corde $K = \sqrt{\frac{A}{R + R''}}$, & de la, ſelon la formule de Lambert, le tems

$$T = \frac{\left(\frac{1+K}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1-K}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\, m \sqrt{2}}.$$

Quelques changemens dans la valeur adoptée pour $s$ donneront bientôt aſſez approchamment la valeur de T.

## IV.

Ayant $s$, on prendra à volonté $R' - R = d$, de manière cependant que $d^2 < K^2$, & on cherchera l'angle $2\,\Phi$ compris entre les deux rayons vecteurs, par la formule

$$\text{ſin.}\, \Phi = \sqrt{\frac{K^2 - (R' - R)^2}{4\, R\, R'}}.$$

## V.

Ayant trouvé cet angle, on déterminera derechef le tems T, moyennant l'expreſſion

$$T^2 = \frac{s^3 - 3\, s\, R'\, R\, cof.\, \Phi^2 - 2\, R'\, R\, cof.\, \Phi^3 \sqrt{R'\, R}}{18\, m^2}.$$

Un petit nombre de poſitions, faites pour $d$, donnera très approchamment la valeur de T.

## VI.

Enſuite la formule

$$2\, D = \frac{2\, R'\, R\, ſin.\, \Phi^2}{1 - 2\, coſ.\, \Phi \sqrt{R'\, R}},$$

donnera la diſtance périhélie.

VII.

Enfin le tems du périhélie ſera

$$27,408257\,(R + 2\,D)\,\sqrt{(R - D)}.$$

Et de là on déduira facilement l'inclinaiſon & le lieu du noeud, ſoit par la Trigonométrie ſphérique, au moyen de deux longitudes & latitudes héliocentriques, ſoit par les formules connuës données par M. *Euler*.

Cette méthode eſt certainement plus expéditive que la méthode ordinaire des fauſſes poſitions, & elle a de plus l'avantage que (par le §. II.) on trouve d'abord ſans peine, & aſſez exactement, la corde de l'arc parabolique. Ainſi pour la comète de 1771 la corde de l'arc décrit depuis le 30 Avril $9^h. 48'. 42''$, jusqu'au 16 Mai $10^h. 54'. 45''$. (Obſerv. de Stockholm) étoit ſelon les calculs de M. *de Tempelhof*, K = 0, 39427. D'après ma méthode on a

$$\begin{aligned}
\log. T &= 4,3637248,\\
\log. T^2 &= 8,7274496,\\
\log. C &= 0,7564990,\\
\hline
\log. A &= 9,4839486,\\
\log. s &= 0,2907436,\\
\hline
\log. K^2 &= 9,1932050,\\
\log. K &= 9,5966025,
\end{aligned}$$

donc K = 0, 395004, trop grand ſeulement de 0, 00073.

Dans les Ephémerides de Berlin pour l'an 1777, page 135. feu M. *Lambert* a trouvé, pour la comète de 1773, la corde depuis le 15 Nov. $15^h. 0'$. de cette année, jusqu'au 4 Janv. $13^h$. de l'année ſuivante, K = 0, 83923. Mon calcul donne

log.

$$\begin{aligned} \log. A &= 0,4697152, \\ \log. s &= 0,5925842, \\ \hline & \phantom{=}\ 9,8771310, \\ \log. K &= 9,9385655, \end{aligned}$$

& partant $K = 0,86809$.

Mais il faut remarquer que cette méthode demande des obſervations très exactes, parcequ'une petite erreur peut changer toute l'orbite. J'ai eſſayé de déterminer l'orbite de la comète de 1771, ſelon les obſervations rapportées dans les diſſertations ſur la Théorie des Comètes, qui ont concouru au prix propoſé par l'Académie de Berlin. Il y auroit d'après les calculs de M. *de Tempelhof.*

$$\begin{aligned} s &= 1,953186 \\ K &= 0,395004 \\ d &= 0,102108 \\ R &= 0,925539 \\ R' &= 1,027647 \\ \Phi &= 11^\circ.\ 16'.\ 50''. \\ T &= 16^j,045869 \end{aligned}$$

| J'ai mis | ce qui me donnoit. | |
|---|---|---|
| $s = 1,5$ | $T = 15^j,9843$ | $K = 0,450742$ |
| $s = 2$ | $T = 16,0198$ | $K = 0,390354$ |
| $s = 3$ | $T = 16,0380$ | $K = 0,318723$ |
| $s = 4$ | $T = 16,043$ | $K = 0,27602$ |

La valeur de T, par la poſition $s = 4$, eſt aſſez d'accord, & cependant $s$ a été pris trop grand de 2,046814. L'hypothèſe $s = 2$ me donne $\Phi = 9^\circ.\ 42'.\ 52''$, d'où je tire (ſelon §. V.) $T = 16^j,0392$, & de là, ſelon (§. VI.) la distance périhélie 0,728578, qui devroit être 0,902658. Au reſte

reſte ce n'eſt qu'un premier eſſai, que je tâcherai de perfectionner, s'il obtient votre approbation.

* *
*

Dans les Ephémérides de Berlin pour l'année 1782, page 185, ſe trouve une très belle ſolution du Problème de Kepler, par M. *Trembley*. J'en ai trouvé une autre ſolution encore plus approchante, dont voici le précis: Soit $m$ l'anomalie moyenne, $\varrho$ l'anomalie excentrique, $e$ l'excentricité; & comme $m = \varrho + e \text{ ſin. } \varrho$, je mets $m - \varrho = \pi$, pour avoir $m - \varrho = e \text{ ſin. } \varrho$, c'eſt-à-dire $\pi = e \text{ ſin. } (m - \pi)$. Or comme $\pi$ eſt toujours un arc très petit, on pourra mettre

$$\text{ſin. } \pi = e \text{ ſin. } (m - \pi) = e \text{ ſin. } m \text{ coſ. } \pi - e \text{ coſ. } m \text{ ſin. } \pi,$$

d'où l'on tire

$$\text{tang. } \pi = \frac{e \text{ ſin. } m}{1 + e \text{ coſ. } m}.$$

Ayant trouvé $\pi$ moyennant cette expreſſion, on aura l'anomalie excentrique $\varrho = m - \pi$.

Pour corriger l'erreur de cette approximation, je ſuppoſe que $\varrho$ ait été trouvé trop petit de la petite quantité $\omega$, & la correction cherchée ſera

$$\omega = \frac{m - \varrho - e \text{ ſin. } \varrho}{1 + e \text{ coſ. } \varrho}.$$

Soit pour Mercure $m = 20$ & $e = 0, 20589$, on aura

$$\begin{array}{ll} \text{log. } (e \text{ ſin. } m) & = 8, 8476870 \\ \text{log. } (1 + e \text{ coſ. } m) & = 0, 0768126 \\ \hline \text{log. tang. } \pi & = 8, 7708644 \end{array}$$

par conſéquent $\pi = 3°. 22'. 37''.$ & $\varrho = 16°. 37'. 23''.$, où la faute n'eſt que de $5'', 4$. Si l'on vouloit faire uſage de la correction rapportée, on auroit

$m - \varrho$

$$m - \varrho \quad = 0,05893880$$
$$e - \text{ſin.}\,\varrho = 0,05889978$$
$$1 + e\,\text{coſ.}\,\varrho = 1,\ 1972850$$

par conſéquent

$$\log.\ \text{Num} = 5,5912873$$
$$\log.\ \text{Den} = 0,0781976$$
$$\log.\ \omega = 5,5130897$$

donc $\omega = 0,00003259$, ou bien $\omega = 6,''$ & partant $\varrho =$ $16^\circ.\ 37'.\ 29''$. La vraye valeur eſt $16^\circ.\ 37'.\ 28'',4$.

* * *

Dans les Ephémérides de Berlin ſe trouve une méthode de M. *Caſſini*, reduite en formules par M. *Käſtner*, pour déterminer l'orbite d'une Planète moyennant des oppoſitions ou conjonctions. Cette méthode eſt analogue à celle des fauſſes poſitions, telle que *La Caille* l'enſeigne. J'ai penſé réſoudre directement le Problème, au moins pour de petites excentricités. Voici le précis de ma méthode, accompagné d'une application.

## Problème.

Déterminer l'orbite d'une planète par quatre oppoſitions.

## Solution.

Soit $t$ le tems entre la première & ſeconde obſervation, $t'$ le tems entre la première & troiſième & $t''$ celui entre la première & quatrième. Soit la différence des longitudes entre I & II $= f$, entre I & III $= g$ & entre I &

IV $= h$; l'anomalie moyenne pour I $= m$ & l'anomalie vraye $= \Phi$, l'excentricité $= e$ & le tems periodique $=$ T, on aura, pour déterminer les quatre inconnues $m$, $\Phi$, $e$ & T les quatre équations ſuivantes :

$$\text{I.} \quad m = \Phi + 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi,$$

$$\text{II.} \quad m + \tfrac{a}{T} = \Phi + f + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + f),$$

$$\text{III.} \quad m + \tfrac{b}{T} = \Phi + g + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + g),$$

$$\text{IV.} \quad m + \tfrac{d}{T} = \Phi + h + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + h),$$

en mettant, pour abrêger, $360\,t = a$; $360\,t' = b$; $360\,t'' = d$.

En ſouſtrayant la I. des trois ſuivantes il en réſulte

$$\text{V.} \ - \ - \ \tfrac{a}{T} = f + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + f) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi,$$

$$\text{VI.} \ - \ - \ \tfrac{b}{T} = g + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + g) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi,$$

$$\text{VII.} \ - \ - \ \tfrac{d}{T} = h + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + h) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi.$$

Et en diviſant VI & VII par V, on obtient

$$\text{VIII.} \ - \ - \ \frac{b}{a} = \frac{g + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + g) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi}{f + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + f) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi},$$

$$\text{IX.} \ - \ - \ \frac{d}{a} = \frac{h + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + h) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi}{f + 2\,e\ \text{ſin.}\ (\Phi + f) - 2\,e\ \text{ſin.}\ \Phi},$$

Je mets pour abrêger les calculs

$$\tfrac{b}{a} = A;\ Af - g = M;\ 1 - A = P,$$

$$\tfrac{d}{a} = B;\ Bf - h = N;\ 1 - B = Q,$$

& je tire de la VIII.

$$2\,e = \frac{M}{\text{ſin.}\ (\Phi + g) + P\ \text{ſin.}\ \Phi - A\ \text{ſin.}\ (\Phi + f)}.$$

En ſubſtituant cette valeur dans la IX, elle me fournit

$$\text{tag.}\ \Phi = \frac{M\ \text{ſin.}\ h - N\ \text{ſin.}\ g + (NA - BM)\ \text{ſin}\ f}{\Phi N + QM + N\ \text{coſ.}\ g - M\ \text{coſ.}\ h - (NA - BM)\ \text{coſ.}\ f}.$$

Enfin

Enfin on aura

$$T = \frac{a}{f + 2\, e\, ſin.\, (\Phi + f) - 2\, e\, ſin.\, \Phi},$$

$$m = \Phi + 2\, e\, \text{ſin.}\, \Phi.$$

Au défaut d'autres obſervations je me ſers des ſuivantes, pour en faire l'application

| Temps moyen | | | Longit. du ⊙ |
|---|---|---|---|
| 1749. | 21 | Mars. | $0^s.\ 1°.\ 1'.\ 19'', 5$ |
| —— | 7 | Août. | 4, 14, 57, 30, 4 |
| —— | 10 | Oct. | 6, 17, 16, 53, 0 |
| 1750. | 2 | Mars. | 11, 11, 51, 17, 9 |

On aura donc

$$t = 139^j;\ t' = 203^j;\ t'' = 346^j,$$

$$f = 4^s,\ 13°,\ 56',\ 11'', = 2,3376261,$$

$$g = 6,\ 16,\ 15,\ 33 = 3,4253646,$$

$$h = 11,\ 10,\ 49,\ 58 = 5,9486541,$$

| | | |
|---|---|---|
| $l\,a = 8,2556198$ | $Af = 3,413943$ | $P = -0,460432$ |
| $l\,b = 8,4201010$ | $Bf = 5,\ 81884$ | $Q = -1,489208$ |
| $l\,d = 8,6516811$ | $M = -0,011422$ | |
| | $N = +0,\ 12982$ | |

De là on tire log. tag. $\Phi = 0,8895564$, & partant $\Phi = 262°, 39', 6''$. Enſuite on aura $e = -0,0168362$, par conſéquent

$$\text{Log. } 2\, e\, \text{ſin.}\, (\Phi + f) = (+)\ 8,3025569,$$

$$\text{Log. } 2\, e\, \text{ſin.}\, \Phi = (-)\ 8,5236920,$$

$$\begin{aligned} \log.\ a &= 8,2556198 \\ \log.\ den &= 0,3785977 \\ \hline \log.\ T &= 7,8770221 \\ \log.\ (57°.\ 17'.\ 44'',8) &= 5,3144251 \\ \hline & \quad 2,5625970 \end{aligned}$$

donc $T = 365^j, 25571$. Il y a donc

| D'après ce calcul. | D'après les tables. | Différence. |
|---|---|---|
| $\Phi = 262°, 39', 6''$ | $\Phi = 262°, 21', 46''$ | $-17', 20''$ |
| $e = 0,0168362$ | $e = 0,0168310$ | 0,0000052 |
| $T = 365^j, 25571$ | $T = 365^j, 25659$ | 0,00088 |

De cette manière le Calcul ne devient pas trop pénible & ſera toujours plus facile que par la méthode ordinaire. Si j'en excepte M. *Euler*, perſonne, que je ſache, a réſolu directement ce Problème.

EX-

# EXTRAIT DES MÉMOIRES
## CONTENUS DANS CE VOLUME.

# CLASSE MATHÉMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

## I.

## Variae conſiderationes circa ſeries hypergeometricas.

Auctore *L. Eulero*. pag. 3.

Ce Mémoire eſt une ſuite de celui qui a été inſéré dans le volume précédent de nos Actes & dont nous avons donné le précis dans l'Hiſtoire qui précéde le dit Volume, page 38. L'Auteur continue ici ſes recherches ſur le terme général des ſéries hypergéométriques, en conſidérant particuliérement les trois produits infinis:

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b) - - - - [a+(i-1)b] = \Gamma : i,$$
$$a(a+2b)(a+4b)(a+6b) - - - - [a+(2i-2)b] = \Delta : i,$$
$$(a+b)\ (a+3b)\ (a+5b) - - - - [a+(2i-1)b] = \Theta : i,$$

dont il cherche les valeurs finies, en prenant les logarithmes, & appliquant aux ſéries qui en réſultent ſa méthode de trouver la ſomme des ſéries par le moyen de leur terme général, ce qui, en remontant aux nombres, lui fournit les expreſſions ſuivantes:

$\Gamma : i$

$$\Gamma : i = \text{A}\, e^{-i}\, (a - b + b\, i)^{\frac{a}{b} + i - \frac{1}{2}},$$

$$\Delta : i = \text{B}\, e^{-i}\, (a - 2\, b + 2\, b\, i)^{\frac{a}{2\,b} + i - \frac{1}{2}},$$

$$\Theta : i = \text{C}\, e^{-i}\, (a - b + 2\, b\, i)^{\frac{a}{2\,b} + i},$$

A, B, C, étant des conſtantes introduites par l'intégration & dépendantes l'une de l'autre de manière que $\text{B} = \sqrt{k\, e}\, \text{A}$ & $\text{C} = \sqrt{\frac{\text{A}}{k}}$ & $k = \sqrt{a\, \frac{\text{P}}{\text{Q}}}$, où

$$\text{P} = \int \frac{x^{a + b - 1}\, \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\,b})}} \;\&\; \text{Q} = \int \frac{x^{a - 1}\, \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\,b})}},$$

les integrales priſes depuis le terme $x = 0$ jusqu'au terme $x = 1$.

## II.

## De vero valore formulae integralis $\int \partial x \, (l\, \frac{1}{x})^n$, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extenſae.

Auctore *L. Eulero*. pag. 15.

La formule dont il s'agit, dans ce Mémoire, de trouver la vraye valeur, repréſente le terme général de la progreſſion hypergéométrique de Wallis; ſa valeur peut, par conſéquent, être regardée comme parfaitement connue, pour tous les cas, où l'expoſant $n$ eſt un nombre entier poſitif ou négatif; mais lorsque cet expoſant eſt un nombre fractionnaire, on ſait par les recherches antérieures de M. Euler ſur ce ſujet, que la valeur de la formule propoſée dépend de la quadrature d'une courbe algébrique d'un ordre plus ou moins élevé, ſelon que le dénominateur de la fraction, priſe pour $n$, eſt plus ou moins grand. C'eſt donc auſſi de la reduction de ces valeurs tranſcendantes à la quadrature de courbes algébri-

gébriques, qu'il s'agit dans ce Mémoire. Voici le précis de la méthode que l'auteur employe pour cet effet.

Il met $l\frac{1}{x} = u$, & comme la formule propoſée $\int u^n \partial x$ eſt reductible, pour le terme d'intégration établi $x = 0$, tant à $n \int u^{n-1} \partial x$ qu'à $\frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, on pourra, moyennant la premiere réduction, diminuer ſucceſſivement de l'unité toute fraction poſitive priſe pour $n$, quelque grande qu'elle ſoit, & réduire l'expoſant à une fraction contenue entre les limites o & 1; & à l'aide de la ſeconde réduction, on ſera en état d'augmenter ſucceſſivement de l'unité toute fraction négative qu'on prendroit pour $n$, & réduire cet expoſant à une fraction renfermée entre les mêmes limites o & 1. Par là on obtient l'avantage de n'avoir à traiter que les fractions poſitives moindres que l'unité.

Ceci remarqué M. Euler conſidère la ſérie

$$s = 1 + A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + \&c.$$

formée des produits des deux coëfficiens correſpondans des puiſſances $m$ & $n$ développées du binome $1 + z$, ſavoir

$$(1 + z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

$$(1 + z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$$

& ayant fait voir, dans le Mémoire qui eſt à la ſuite de celui-ci, que la ſomme de la ſérie mentionnée peut être exprimée ainſi:

$$s = \frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^m \partial x \int u^n \partial x},$$

il compare cette valeur avec celle qu'il avoit donnée autre fois (Acta pro A°. 1781. P. I. pag. 82.) pour la ſomme de de la même ſerie, ſavoir:

$$s = \frac{m+n}{m\, n \int x^{m-1} \partial x\, (1 - x)^{n-1}},$$

 &

& il en déduit cette équation :

$$\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu}}\,.\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\nu}}=\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu+\nu}}\int\frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\nu}}},$$

où $\mu=\lambda m$, $\nu=\lambda n$ & $z=\sqrt[\lambda]{x}$, & la derniere intégrale réductible à la quadrature du cercle, toutes les fois que $\mu+\nu=\lambda$. Et en général, quelle que ſoit la valeur des lettres $\lambda$, $\mu$ & $\nu$, pourvu que $\mu$ & $\nu$ ſoyent moindres que $\lambda$, la valeur de cette intégrale pourra être regardée comme connue, de même que $\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\mu}}$ & $\int\partial x\sqrt[\lambda]{u^{\nu}}$, deſorte que la valeur de la formule propoſée pourra être déterminée pour toutes les valeurs poſſibles de l'expoſant $n$. Ces recherches générales ſont éclaircies par pluſieurs applications que M. Euler en fait, en donnant à $\lambda$ ſucceſſivement les valeurs 2, 3, 4 & 5, & à $\mu$ & $\nu$, dans chaque cas, toutes les valeurs audeſſous de $\lambda$.

## III.

## Plenior expoſitio ſerierum illarum memorabilium, quae ex vnciis poteſtatum binomii formantur.

Auctore *L. Eulero*. pag. 32.

On a vu dans l'extrait du Mémoire précédent que M. Euler exprime la ſomme de la ſérie

$$s=1+A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta+\text{etc.}$$

compoſée des produits de deux coëfficiens correſpondans des puiſſances $m^{me}$ & $n^{me}$ du binome $1+z$, par la formule $s=\frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m}\partial x\,.\int u^{n}\partial x}$, où $u=l\frac{1}{x}$. Il en donne, dans le préſent

Mé-

Mémoire une démonſtration très facile, qui, quoiqu'elle paroiſſe reſtreinte aux expoſans *m* & *n* entiers, doit pourtant, en vertu du principe de la continuité, valoir auſſi pour des expoſans fractionnaires quelconques.

Cependant comme non ſeulement cette ſérie, mais auſſi toutes les autres progreſſions, formées d'une manière ſemblable des coëfficiens de deux puiſſances différentes du Binome, ſont exprimées par la quadrature de courbes plus ou moins tranſcendantes; l'auteur expoſe ici une méthode d'exprimer les ſommes des mêmes ſéries par la quadrature de courbes algébriques, pour des expoſans fractionnaires quelconques. Les réductions, ſur lesquelles cette méthode eſt fondée, étant trop nombreuſes, pour être ſuſceptibles d'extraits, nous nous contenterons de rapporter les ſéries que M. Euler a ſoumiſes à ſes recherches, avec l'expreſſion de leurs ſommes.

En mettant donc

$$\frac{1}{(1-x^b)^{\frac{a}{b}}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1-x^b)^{\frac{\alpha}{b}}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{etc.}$$

M. Euler donne les ſommations ſuivantes:

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C + \mathfrak{C}D + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}D + \mathfrak{C}E + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

$$1 + \mathfrak{A}D + \mathfrak{B}E + \mathfrak{C}F + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

etc. etc. etc.

où $\Delta = \frac{\pi}{b\ \text{ſin.}\ \frac{a\pi}{b}}$, $a > 0$ & $a + \alpha < b$.

La ſeconde de ces ſommations étant reſtreinte avec toutes les autres, comme nous venons de dire, aux cas où $a$ eſt contenu entre les limites 0 & $b$, M. Euler reprend la même ſérie, en cherchant la ſomme pour les cas où $a$ eſt un nombre négatif, mais plus petit que $b$, & enſuite pour des valeurs négatives de $a$ quelconques.

Enfin la ſomme de la même ſérie peut être réduite à la quadrature de courbes algébriques plus ſimples, par un procédé que l'auteur a dejà employé autrefois, dont voici le fond. En déſignant par les caractères $(\frac{m}{1})$, $(\frac{m}{2})$, $(\frac{m}{3})$, etc. les coëfficiens de la $m^{me}$ puiſſance, & par $(\frac{n}{1})$, $(\frac{n}{2})$, $(\frac{n}{3})$, etc. les coëfficiens de la $n^{me}$ puiſſance du Binome $1 + z$, M. Euler a fait voir dans la $1^{re}$ partie des Actes pour l'année 1781, que la ſomme de la ſérie

$$1 + (\tfrac{m}{1})(\tfrac{n}{1}) + (\tfrac{m}{2})(\tfrac{n}{2}) + (\tfrac{m}{3})(\tfrac{n}{3}) + \text{etc.}$$

eſt égale au produit

$$\frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} + - - - - - \frac{m+1}{n},$$

& il a dejà obſervé alors, que ce produit eſt auſſi la valeur de l'ex-

l'expreſſion $\frac{1}{m \int x^m \partial x (1 - x)^{n-1}}$, l'intégrale étant priſe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ſans démontrer directement cette aſſertion dans le Mémoire cité. Une démonſtration de la ſommation mentionnée & pluſieurs transformations de la forme rapportée terminent le préſent Mémoire.

## IV.

## Exercitatio analytica.

Auctore *L. Eulero*.

Sachant que le coſinus de tout angle peut être exprimé par un produit d'un nombre infini de facteurs, ſavoir

$$\text{coſ.}\ \frac{\pi}{2n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{25n^2}\right) (\text{etc.}$$

il ſe préſente ici une queſtion intéreſſante: comment, en ſuppoſant la valeur de ce produit inconnue, on puiſſe trouver d'une manière facile ſa valeur coſ. $\frac{\pi}{2n}$. C'eſt le ſujet de ce petit Mémoire.

Ayant pris les logarithmes & ſubſtituée à la place de chacun ſa valeur en ſérie, tout revient à ſommer les ſéries réciproques des puiſſances paires des nombres impairs, que M. Euler indique reſpectivement par $A\varrho^2$, $B\varrho^4$, $C\varrho^6$, etc. où $\varrho = \frac{\pi}{2}$, & en faiſant uſage des relations entre les lettres A, B, C, D, etc. que l'on trouve démontrée dans les *Opuſcula analytica*, & ailleurs, il parvient à trouver pour le produit en queſtion la valeur connue coſ. $\frac{\pi}{2n}$.

## V.

## Euolutio Problematis, cuius Solutio analytica eſt difficillima, dum ſynthetica per ſe eſt obuia.

Auctore *L. Eulero* pag. 73.

Parmi les Problèmes qu'on a coûtume de réſoudre par la méthode inverſe des tangentes, il y en a un grand nombre, dont une ou pluſieurs ſolutions particulieres, & ſouvent même la ſolution complette, ſont évidentes, & qui neanmoins, ſurtout lorsqu'il eſt queſtion d'une propriété du rayon oſculateur, ſont aſſez difficiles à réſoudre analytiquement, à cauſe des ſecondes différentielles qui entrent dans l'expreſſion générale de cette ligne. De cette eſpèce eſt auſſi le Problème qui fait le ſujet de ce Mémoire, où il s'agit de tracer autour d'un point donné une ligne courbe, de maniere que la diſtance du point fixe donné au centre du cercle oſculateur ſoit partout la même. On voit d'abord que toutes les courbes engendrées par le développement d'une cercle qui a le point donné pour centre, ſatisfont à la condition préſcrite. On voit auſſi qu'à cette même condition ſatisfont tous les cercles dont le centre eſt à une diſtance donnée du point fixe. Cependant la ſolution analytique complette de ce Problème, qui doit contenir toutes les deux ſolutions mentionnées, n'eſt pas ſans difficultés.

M. Euler tente ici deux moyens pour obtenir une telle ſolution complette. Dans la première ſolution il fait entrer la perpendiculaire abaiſſée du point fixe donné ſur la tangente de la courbe & la diſtance de cette ligne au point correſpondant de l'arc, ce qui, en nommant cette perpendiculaire

culaire $p$ & ſa diſtance au point correſpondant de la courbe $t$, conduit à l'équation $\partial p \sqrt{(aa - tt)} - t \partial t = 0$. Dans la ſeconde ſolution M. Euler conſidère l'amplitude $\Phi$ de la courbe, & la perpendiculaire $v$ abaiſſée du point fixe ſur le rayon oſculateur, & cette conſidération fournit l'équation $\partial \Phi \sqrt{(aa - vv)} = \partial v$. Ainſi l'une & l'autre ſolution générale conduit à une équation de la forme $M \partial V = 0$, laquelle, en mettant $M = 0$, produit la première, & en mettant $\partial V = 0$ la ſeconde ſolution particuliere mentionnée.

Le Mémoire eſt terminé par quelques objections contre un principe établi par M. de la Grange, en vertu duquel l'équation finie $M = 0$ ſe déduit de l'équation intégrale complette $\int M \partial V = C$, en différenciant de nouveau l'équation intégrale, en faiſant varier auſſi la conſtante C, introduite par l'intégration, & mettant zéro le coëfficient de la différentielle $\partial C$ de cette conſtante regardée comme variable, d'où réſulte une valeur de cette conſtante, qui, ſubſtituée dans l'équation intégrale, fournit l'équation $M = 0$. Il y a lieu de croire que M. Euler n'a pas bien ſaiſi l'idée de M. de la Grange, auſſi paroît-il diſpoſé lui-même à mettre ſes doutes ſur le compte de quelque malentendu.

## VI.

## Problema geometricum ob ſingularia ſymptomata imprimis memorabile.

Auctore *L. Eulero*. pag. 87.

Le Problème dont il s'agit dans le préſent Mémoire eſt de tracer autour d'un point donné une ligne courbe telle que

que l'aire du ſecteur compris entre un arc quelconque & les deux droites tirées de ſes extrémités au point donné ſoit proportionnelle au quarré de l'arc, c'eſt-à-dire que $s^2 = 4n\Sigma$, $s$ étant l'arc & $\Sigma$ la ſurface du ſecteur. La Spirale logarithmique préſente une ſolution de ce Problème, qui n'eſt cependant que particuliere, parcequ'elle eſt reſtreinte aux valeurs de $n$ plus grands que 2, & qu'elle ne ſauroit avoir lieu que lorsque les arcs & les ſurfaces ſont comptées depuis le centre de la Spirale. Ceci a engagé M. Euler à chercher une ſolution générale de ce Problème, où non ſeulement la lettre $n$ puiſſe avoir des valeurs quelconques, mais dans laquelle le point A, qui dans la Spirale doit tomber dans le centre de la courbe, ſoit abſolument arbitraire. Le grand génie de l'auteur, ſi fertile en expédiens, lui fournit trois méthodes différentes de réſoudre généralement ce Problème.

La première ſolution eſt fondée ſur deux propriétés très-remarquables de la courbe cherchée, qui ſe préſentent d'abord ſans peine: 1°.) que l'arc eſt à la portion de la Normale, compriſe entre la courbe & la perpendiculaire abaiſſée du point fixe donné, dans le rapport $n:1$; 2°.) que le rayon oſculateur eſt à la perpendiculaire mentionnée dans le même rapport. En nommant la perpendiculaire $t$ & l'amplitude $\Phi$, on parvient, à l'aide des propriétés ſusdites à une équation différentielle du ſecond degré $\partial\partial t - n\,\partial t\,\partial\Phi + t\,\partial\Phi^2 = 0$, dont l'intégrale complette eſt $t = A\,e^{\alpha\Phi} + B\,e^{\beta\Phi}$, de ſorte que l'arc, la ſurface du ſecteur & les coordonnées de la courbe peuvent être exprimées ſans difficulté par la ſeule amplitude. Pour mieux approfondir les courbes douées de la propriété préſcrite dans le Problème, l'Auteur diſtingue les trois cas $n > 2$, $n = 2$ & $n < 2$, & traite chacun ſéparément, parceque les courbes qui réſultent de cette triple conſidération diffèrent eſſentiellement entr'elles.

Le

La ſeconde ſolution, la plus facile de toutes les trois, eſt fondée ſur la conſidération du rayon vecteur & de l'angle decrit par ce rayon, en faiſant entrer dans le calcul une troiſième variable qui exprime le rapport des différentielles de l'angle mentionné & du logarithme du rayon vecteur, variable par laquelle on exprime facilement les deux autres.

La troiſième Solution, la plus rémarquable à cauſe des difficultés qu'elles préſente, eſt déduite immédiatement de l'équation fondamentale $ss = 4n\Sigma$, de laquelle, en introduiſant les coordonnées $x$ & $y$ & la valeur $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, on déduit d'abord $s = \frac{n(y - px)}{\sqrt{(1 + pp)}}$; & c'eſt cette équation qui, maniée avec adreſſe, conduit enfin aux mêmes valeurs de l'abſciſſe & de l'ordonnée, que la première ſolution avoit fournies.

## VII.

## De curuis hyperbolicis, quae intra ſuas Aſſymtotas ſpatium finitum includunt.

Auctore *L. Eulero.* pag. 116.

On ſait que toutes les courbes hyperboliques contenues dans l'équation binome $x^m y^n = 1$ renferment entre leurs Aſſymtotes un, ou même deux eſpaces infinis. Il en eſt tout autrement des Hyperboles contenues dans l'équation trinome $A x^\alpha y^\beta + B x^\gamma y^\delta = C$, parmi lesquelles il y a une infinité dont l'eſpace contenu entre l'Aſſymtote & la courbe eſt de grandeur finie. Le but de ce Mémoire eſt de faire connoître les courbes douées de cette propriété & de déterminer les conditions pour les coëfficiens & les expoſans de l'équa-

l'équation trinome, ſous lesquelles les courbes, contenues dans cette équation, peuvent renfermer entre leurs Aſſymtotes un eſpace fini. Ces conditions ſont: 1°.) que tous les coëfficiens A, B, C, ſoyent poſitifs; 2°.) que tous les expoſans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ſoyent poſitifs; & que 3°.) ces expoſans ſoyent tels que des deux fractions $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ l'une ſoit plus grande & l'autre plus petite que l'unité.

Après avoir démontré d'une maniere qui ne laiſſe rien à déſirer, la néceſſité de ces conditions, l'Auteur paſſe à l'éxamen des courbes hyperboliques dont la nature eſt exprimée par l'équation $a\,x^\alpha\,y^\beta + b\,x^\beta\,y^\alpha = c$, ces courbes, en ſuppoſant $\alpha + \beta = 1$, étant douées de la propriété remarquable que l'eſpace fini contenu entre leurs Aſſymtotes, prolongés à l'infini, peut être exprimé algébriquement, & même par la forme très ſimple $\frac{cc}{2\,a\,b\,(\alpha - \beta)}$. Mais comme à cauſe de $\alpha + \beta = 1$, l'équation qui exprime la nature de ces lignes eſt irrationelle, pour la rendre rationelle M. Euler met $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ & $\beta = \frac{\nu}{\lambda}$, de ſorte que cette équation, réduite à la rationalité, monte à l'ordre $\lambda$. L'application à quelques cas particuliers termine ce Mémoire.

## VIII.

## De curſu nauis in Sphaeroide elliptico.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 140.

Ce mémoire qu'on peut regarder comme la ſuite des recherches ſur la projection d'un Sphéroide elliptique, a pour objet la nature & la projection de la courbe *Loxodromique*, décrite dans la ſurface d'un Sphéroide applati, dont dependent les manieres de dreſſer les cartes hydrographiques. La ſituation de deux lieux

lieux étant donnée par leurs latitudes & longitudes, on trouve en général, que la Loxodromique décrite entre ces deux lieux coupe les cercles paralléles à l'Equateur ſous des angles plus petits, dans le Sphéroide que dans la Sphère: d'où il ſuit, qu'au premier cas il faut diriger le vaiſſeau tant ſoit peu plus vers l'Eſt ou l'Oueſt. La longitude de l'arc Loxodromique, ou la diſtance des deux lieux par mer, depend de la rectification de l'Ellipſe, & l'Auteur a calculé une table pour cet effèt. Le premier but des cartes Hydrographiques étant, de repréſenter la Loxodromique d'une telle maniere, qu'elle coupe les Méridiens conſtamment ſous le même angle qu'à la ſurface de la terre: l'Auteur trouve une *courbe*, par le moyen de laquelle on obtient non ſeulement ce but-là, mais encore d'autres buts très-importans pour l'uſage géographique. Mais comme l'uſage que les pilotes font de ces cartes, exige que le cours du vaiſſeau ou la Loxodromique ſoit repréſentée par une ligne droite, l'Auteur montre les régles d'une telle projection, & donne trois tables pour la Sphère, & pour deux hypothèſes de l'applatiſſement, ſavoir pour la raiſon des axes 230 : 229 & 200 : 199. En ſe ſervant de cette table, on peut dreſſer les cartes hydrographiques, & reſoudre tous les problèmes de la navigation, avec la même facilité que par le moyen des tables nautiques vulgaires.

## IX.

## Reflexions ſur les Logarithmes imaginaires.

Par *F. T. Schubert*. pag. 171.

La queſtion ſur la nature des Logarithmes des nombres négatifs, ayant occaſionné une diſpute celèbre entre M.

M. *Leibnitz* & *Jean Bernoulli*, fut enfin décidée par M. *L. Euler* d'une maniere qui avait toujours paru ſatisfaiſante. Mais comme il déduit par ſa méthode les formules ſuivantes:

$$l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}, \ \& \ l(-1) = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

qui en faiſant $\lambda = 0$, donnent $l(+1) = 0\sqrt{-1} = 0$, & $l(-1) = \pi\sqrt{-1}$ imaginaire, & que cette ſolution eſt fondée ſur la ſuppoſition que $0\sqrt{-1}$ ſoit $= 0$: M. *Riccati* dans les *Mémoires de la Societé Italienne* prétend de démontrer par la *Conchoide*, que le zéro imaginaire ($0\sqrt{-1}$) diffère eſſentiellement du zéro réel ($0$). M. *Schubert* tâche de repondre à ces objections, de juſtifier le ſentiment & les raiſonnemens de M. *Euler*, & de développer le vrai ſens de cette expreſſion analytique $0\sqrt{-1}$.

## X.

## De nouis quibusdam Cauſticae Parabolae proprietatibus.

Auctore *Nicolao Fuſs*. pag. 182.

L'Auteur de ce Mémoire, occupé à la ſolution d'un Problème par la méthode inverſe des tangentes, étoit tombé ſur quelques propriétés remarquables de la Cauſtique de la Parabole, qu'il préſente ici, incertain ſi ces propriétés ont dejà été remarquées par d'autres Géomètres, ou non. Il commence par la réſolution du Problème général des Cauſtiques formées par la réflexion de rayons incidens perpendiculairement à l'axe de la courbe reflêchiſſante. Il en fait l'application à la Parabole conique, en examinant ſoigneuſement les principales propriétés dont la Cauſtique de cette Parabole eſt

eſt douée. Parmi ces propriétés il diſtingue particulièrement les trois ſuivantes:

1°.) La ſomme de l'ordonnée & de l'arc correſpondant eſt en raiſon ſoudouble de l'abſciſſe.

2°.) En prenant les abſciſſes ſur la droite qui coupe les deux branches de la courbe & ſon axe à angles droits, la différence entre l'arc & la ligne des abſciſſes compriſe entre la courbe & la Normale correſpondante, eſt égale au triple du demi-paramètre de la Parabole génitrice.

3°.) En prolongeant la Tangente jusqu'à une perpendiculaire érigée ſur l'axe à une diſtance donnée, la demi-ſomme de cette perpendiculaire & de la Tangente eſt égale à l'arc pris du ſommet de la courbe.

L'Auteur examine dans les trois Problèmes ſuivans, par la méthode inverſe des Tangentes, ſi la Cauſtique de la Parabole eſt la ſeule courbe douée des propriétés rapportées, ou s'il y en a d'autres courbes où elles ont auſſi lieu, & il termine le Mémoire par la ſolution du Problème qui a donné la premiere occaſion à ces recherches.

## XI.
## Demonſtratio Theorematum quorundam analyticorum.

Auctore *Nicolao Fuſs.* pag. 201.

Feu M. Euler avoit donné dans le ſeptième volume des Commentaires de l'Académie les ſommations ſuivantes:

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots \tfrac{1}{n} = l\,\tfrac{1}{0},\\
B &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} + \tfrac{1}{n+4} + \cdots \tfrac{1}{2n} = l\,\tfrac{2}{1},\\
C &= \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} + \tfrac{1}{2n+3} + \tfrac{1}{2n+4} + \cdots \tfrac{1}{3n} = l\,\tfrac{3}{2},\\
D &= \tfrac{1}{3n+1} + \tfrac{1}{3n+2} + \tfrac{1}{3n+3} + \tfrac{1}{3n+4} + \cdots \tfrac{1}{4n} = l\,\tfrac{4}{3},\\
&\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.}
\end{aligned}
$$

où la lettre *n* indique un nombre infiniment grand. Le R. P. Fontana ayant donné, dans la premiere partie du ſecond Volume des Mémoires de Mathématique & de Phyſique de la Société Italienne, une démonſtration de la ſeconde des ſommations ſus-mentionnées, fondée ſur une méthode applicable à toutes les autres, mais penible & longue, M. Fuſs a pris de là occaſion d'eſſayer une autre méthode de démontrer plus facilement ces mêmes ſommations. Voici le type de ſa démonſtration:

$$
\begin{aligned}
A + B &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} \cdots \tfrac{1}{2n},\\
-A &= -1 \quad - \tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{3} \quad - \tfrac{1}{4} \quad - \tfrac{1}{5} \cdots - \tfrac{1}{n},\\
\hline
B &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \text{\&c.} = l\,2,
\end{aligned}
$$

donc $B = l\,\tfrac{2}{1}$,

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} \cdots \tfrac{1}{3n},\\
-A &= -1 \quad - \tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{3} - \cdots \tfrac{1}{n},\\
\hline
B + C &= 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \text{\&c.} = l\,3,
\end{aligned}
$$

donc $C = l\,3 - B = l\,\tfrac{3}{2}$,

$$
\begin{aligned}
A + B + C + D &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} \cdots \tfrac{1}{4n},\\
-A &= -1 \quad - \tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{3} \cdots \tfrac{1}{n},\\
\hline
B + C + D &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{3}{12} + \text{\&c.} = l\,4,
\end{aligned}
$$

donc

donc $D = l\,4 - (B + C) = l\,\frac{4}{3}$,
& ainſi de ſuite. C'eſt le ſujet du premier article de ce Mémoire.

Le ſecond article roule ſur le Théorème donné par feu M. Euler dans le neuvième Volume des Commentaires, où il a démontré que la ſomme de la ſerie réciproque des nombres premiers eſt infinie, mais pourtant infiniment plus petite que la ſomme de la ſérie réciproque des nombres naturels, & qu'elle en repréſente, pour ainſi dire, le logarithme. Comme M. Fontana attaque dans le même Mémoire dejà cité, le Théorème mentionné, ou plutôt une propoſition qui ſert de fondement à la démonſtration d'Euler, M. Fuſs fait voir que les objections du P. Fontana ſont nulles dans le ſens que M. Euler a donné à l'énoncé de ſon Théorème, quoiqu'elles ſoyent vrayes *in abſtracto*; & pour mieux conſtater la vérité de ce Théorème, il en donne la démonſtration ſous une forme un peu différente de celle de M. Euler, en écartant ſourtout de cette démonſtration la propoſition attaquée par M. Fontana.

Le troiſième Théorème roule ſur la ſommation de la ſérie $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} +$ &c. où les dénominateurs ſont les quarrés impairs diminués de l'unité; & le quatrième roule ſur la ſommation de la ſerie des fractions $\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} +$ &c. dont les dénominateurs ſont les quarrés qui ſont en même tems de plus hautes puiſſances, auſſi diminués de l'unité.

Dans un Supplément l'Auteur éclaircit un malentendu de M. Fontana, concernant l'évanouiſſement des différentielles partielles d'une fonction à pluſieurs variables $x$, $y$, $u$, $v$, qui évanouit, en mettant $x = b$, $y = a$, &c. & dont M. Fontana

tana prétend que toutes les différences partielles évanouiſſent auſſi ſous les mêmes conditions.

## XII.

## Sur les Liſtes des mariages, des naiſſances & des morts à St. Pétersbourg. Mémoire troiſième, contenant la période de 1786 jusqu'en 1790.

Par Mr. *Krafft.* pag. 225.

Ce Mémoire eſt une ſuite à deux autres que l'Auteur à donnés, dans nos Actes, ſur le même objet; l'enſemble de tous les trois préſente une éſpece de revue ſur l'état de la population à St. Pétersbourg conſiderée dans ſes principes, pour 27 années conſécutives, en partant de celle de 1764, dans la quelle S. M. J. notre tres-gracieuſe Souveraine a ajouté à tant d'actions bienfaiſantes à Ses Peuples auſſi celle d'ordonner la formation de pareilles Liſtes.

Dans ce troiſieme Mémoire, qui embraſſe la période de 1786 jusqu'en 1790, Mr. Krafft retrace d'abord le but qu'il s'étoit propoſé en général dans ce genre de récherches; c'étoit 1$^{mo}$, de faire ſentir par l'emploi des Tables *d'une ſeule ville*, combien, ſi l'on en avoit de ſemblables pour des *Provinces entieres* de la Ruſſie, on pourroit en tirer de lumières & d'inſtructions, qui euſſent un rapport intime à l'avantage de l'humanité & au bien-être de la population de l'Empire; 2$^{do}$ de faire voir auſſi, ſous quels points de vûe & de quelle façon un Bureau établi exprés pour la rédaction de ces Tables, devroit les rediger & les examiner pour être à même d'en tirer de pareilles conſéquences. L'auteur donne enſuite toutes

toutes les Tables rélatives à la période en queſtion, rédigées ſur le plan qu'il en avoit établi dans ſon premier Mémoire; Après quoi il paſſe aux concluſions les plus intéreſſantes qu'il en a tirées: 1.) ſur le nombre moyen des habitans de St. Pétersbourg & le rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers; 2.) ſur la fécondité *intentionelle* ou le rapport du nombre annuel des mariages à celui de la population; 3.) ſur la fécondité *réelle*, ou le rapport du nombre annuel des naiſſances à celui des mariages; 4.) ſur la fécondité *générale*, ou le rapport du nombre annuel des naiſſances à celui de la population; 5.) ſur la mortalité *générale* ou le rapport du nombre annuel des morts à celui de la population; 6.) ſur la mortalité *ſpéciale* de chaque âge, des enfans venus morts au monde, des enfans nouveaux-nés, de l'enfance, du moyen âge & de la vieilleſſe; enfin 7.) ſur la force des maladies & l'état de la ſanté publique.

À la fin de ſon Mémoire Mr. Krafft donne un apperçu des nombres annuels des enfans, qui ont été inoculés depuis 1780 jusqu'en 1790 dans la maiſon d'inoculation établie à St. Pétersbourg l'an 1768 par la bienfaiſance de notre très-gracieuſe Souveraine. L'auteur finit par la remarque, qu'une eſpece de publicité à l'égard du nombre de ceux qui meurent annuellement dans la maiſon des Enfans-trouvés, dans les hoſpitaux & dans les priſons, intéreſſe trop l'humanité, pour ne pas la déſirer.

## XIII.

## De motu ſingulari progreſſiuo & rotatorio corporis cylindrici filo flexili, ex cuius altero termino ſuſpenditur, circumdati.

Auctore *Nicolao Fuſs.* pag. 256.

Le mouvement dont l'Auteur fait l'objet de ſes recherches dans ce petit mémoire, eſt celui de la roulette, connue ſous le nom d'Ariſtocrate, ou de joujou de Normandie. Il commence par le cas le plus ſimple, où la roulette, ſuspendue à ſon fil, deſcend verticalement en vertu de ſon propre poids. De là il paſſe à la conſidération du cas, où l'on a imprimé au corps encore un autre mouvement, en le projettant avec une force donnée & dans une direction donnée.

CLAS-

# CLASSE DE PHYSIQUE.

## I.
## Obſeruationum de tela dicta celluloſa, continuatio ſecunda. Celluloſa muſculorum.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 270.

La ſubſtance glutineuſe, ou le tiſſu cellulaire, comme on l'apelle, après avoir formé les diverſes couches ſouscutanées, décrites dans la diſſertation précédente ſur cet objet, va droit aux muſcles, & produit, en les entourant, pour chacun d'eux ſa propre enveloppe. Si on prend d'une part les couches ſouscutanées, & de l'autre les muſcles, & qu'on les tire les uns des autres; la ſubſtance glutineuſe, qui joint les couches aux enveloppes des muſcles, s'étend en forme de membrane, ou lame mince, mais grande & large, qui ſe rétrécit & disparoît de nouveau, quand on laiſſe les couches ſe rapprocher aux muſcles. C'eſt la troiſieme eſpéce des parties du dit tiſſu cellulaire, celle des lames larges & grandes, que les Anatomiſtes ont pris pour naturelles, quoiqu'ils les aient produit eux mêmes. L'Auteur avoit déja fait remarquer les véſicules, qu'on fait naître en inſpirant de l'air dans la ſubſtance glutineuſe, ainſi que les filets qu'on produit en étendant une petite portion de cette ſubſtance, priſe & tirée avec la pincette.

Mais la ſubſtance glutineuſe environne non ſeulement les muſcles, elle penètre auſſi dans leur intérieur. De la ſurface interne de ces enveloppes elle s'inſinue entre les grands faisceaux, dont le muſcle eſt composé, & produit des enveloppes particulieres pour chaque faiſceau contenu dans l'enveloppe commune du muscle. De même elle paſſe de la ſurface intérieure de ces enveloppes particulieres, deſcend entre les fibres, & enduit chaque fibre d'une ſemblable enveloppe, mais plus déliée, plus tendre & plus belle.

M. Wolff explique par cette ſtructure pluſieurs phénomènes, qui ſe preſentent en diſſéquant les muſcles. Un muſcle non préparé, c'eſt à dire, enduit encore de ſes enveloppes, entant que la ſubſtance glutineuſe eſt tranſparente, paroit d'un rouge pâle. Mais en l'obſervant attentivement on remarque à ſa ſurface des lignes longitudinales toutes blanches & élevées. C'eſt la matiere glutineuſe, qui de la ſurface intérieure de l'enveloppe commune s'inſinue entre les faiſceaux, pour produire leurs enveloppes particulieres. Quand on diſſéque un muſcle à travers de ſes fibres, on voit paroître à chaque ſection qu'on fait une nouvelle lame blanche, qui diſtingue toujours la partie préparée du muſcle de celle qui eſt cachée encore. Ce ſont les côtés, ou parois latéraux des enveloppes particulieres qu'on ouvre, ſans le ſavoir, longitudinalement, pour découvrir un nouveau faiſceau. Si l'on diſſèque le muſcle ſelon la longueur de ſes fibres, on apperçoit des enfoncemens ou ouvertures, desquelles ſortent les faiſceaux & les fibres. Ce ſont les ouvertures de enveloppes, coupées à travers.

Les anatomiſtes n'étoient pas fort curieux de ſavoir ce que c'étoit que ces phénomènes, ni d'où ils venoient? Ils ſe contentoient de dire que c'étoit le tiſſu cellulaire. Voyoient-ils

ils ces lames blanches diſtinguer les faiſceaux? c'étoit encore le tiſſu cellulaire. Étoient-ce des enfoncemens dans les enveloppes coupées en travers, qu'ils remarquoient? c'étoit de même le dit tiſſu. Appercevoient-ils ces lignes blanches dans le muſcle non-préparé? c'étoit toujours le tiſſu cellulaire. Ces explications ſans doute n'étoient pas bien philoſophiques, lors même qu'il y auroit un tiſſu. Mais elles le ſont beaucoup moins, lorsque ce tiſſu n'exiſte pas.

M. Wolff pourſuit la ſubſtance glutineuſe jusqu'aux dernières fibrilles des muſcles, qu'on ne voit plus que par le microſcope. C'eſt toujours une ſubſtance très-déliée, presque fluide & claire comme le cryſtal, laquelle ſe l'aiſſe tirer en des filets ſi fins, ſi tendres, ſi beaux, qu'il eſt impoſſible, de les deſſiner avec la même délicateſſe qu'ils exiſtent dans la nature.

## II.

## Expériences ſur le produit en fer de fonte d'un haut fourneau en Sibérie.

Par M. *Hermann* pag. 287.

Notre Académicien commence par rapporter les differens ſentimens des auteurs ſur les deux méthodes uſitées de fondre les mines de fer, comme celle des hautsfours & celle des petits fourneaux. Les premiers ont des avantages réels lorsque les mines ſont pauvres & rebelles, & qu'on doit produire des maſſes plus grandes de fer de fonte, comme c'eſt le cas ſurtout dans les contrées, où l'on eſt obligé de transporter les mines, ou la fonte, fort loin du lieu de l'exploitation. Les autres au contraire conſument moins de charbons & méritent à cet égard une attention plus grande, vû

que les montagnes Ouraliennes p. e. produiſent annuellement plus de $3\frac{1}{2}$ millions de poudes de fer forgé, en y employant à peu près 20 millions de charbons de ſapin. Pour pouvoir comparer les deux méthodes avec plus d'exactitude & pour faire connoître particulierement la manière uſitée en Ruſſie, notre Académicien donne une notice de la fabrique Impériale de Kamensk, ſituée ſur la pente orientale des monts d'Oural, à la gauche de la rivière d'Iſſet, auprés de la petite riviere Kamenka, 90 verſtes de Cathérinebourg. Les mines que l'on y exploite ſont: 1.) Mine de fer ochraceuſe, 2.) Mine de fer ſablonneuſe. 3.) Mine de fer limoneuſe 4.) Hématite ſtalactitique avec de l'ochre de Manganéſe; & 5.) la mine de fer blanche. Avec une corbeille de charbons on y produit 10 poudes $31\frac{5449}{15421}$ livres de fer de fonte. On pourra juger avec plus de préciſion de ces avantages & produits par les dix tables que l'auteur y ajoute ſur le produit journalier en fer de fonte & les matériaux conſumés en l'année 1789. En 1788 la hauteur du four a été augmentée d'une arſchine: on verra en même tems par ces tables, quels ſuccès a eu cette augmentation de hauteur.

## III.

## Obſervations ſur différentes eſpéces de pierres de roche compoſées roulées des environs du canal de Ladoga.

Par M. *Sewerguine.* pag. 301.

L'Auteur donne une déſcription méthodique de quarante différentes combinaiſons de pierres de roche compoſées qu'il a

a eu occaſion d'obſerver parmi les pierres roulées des environs du canal de Ladoga. On y trouve entr' autres de très remarquables, comme celles de Marbre & de Feldſpath, de Marbre & de Quartz, de Marbre & d'Asbeſt, de Labrador & de Quartz, de Feldſpath & de la Plombagine, de Feldſpath jaune & de Feldſpath rouge jaſpitique &c. Il contemple enſuite leur différentes apparences dans l'état de decompoſition, par lesquels le Quartz, le Mica, le Feldſpath & la Hornblende ſe diſtinguent entr'eux d'une maniere fort remarquable. Pour le Feldſpath il cite deux phénomènes très curieux: 1.) Il en a trouvé des échantillons, qui d'un coté démontrent un paſſage évident au jaſpe, tandis que de l'autre c'eſt encore du vrai Feldſpath. 2.) Les Feldſpaths des granits de Finlande s'y trouvent aſſez généralement en plaques plus ou moins rondes, ou ils tendent à cette forme.

## IV.

## Diſſertatio de acidi aceti cryſtalliſatione, exhibens varias eius et recens detectas methodos.

Auctore *Tob. Lowitz.* pag. 316.

M. Lowitz a fait voir dans ſon premier mémoire ſur cet objet, qu'après la diſtilation du vinaigre congelé par le froid on obtient enfin du bain d'eau avec de la poudre de charbons, moyenant la chaleur du bain de ſable, encore un acide très fort, cryſtalliſable au froid. Les cryſtaux privés de toute humidité offrent un vinaigre glacial d'une force ſurprenante, qu'une chaleur de 127 degrés rend fluide, mais qui ſe congéle de nouveau dans une température de 132 —— 135 de-

degrés & forme une maſſe entièrement ſolide ſemblable au camphre.

La beauté ſinguliere de ce produit qui, à l'égard de la diverſité admirable des qualités de ſa cryſtalliſation, ſurpaſſe tous les ſels connus tant naturels qu'artificiels, comme auſſi l'utilité que la médecine retirera probablement de cet acide extrèmement fort & volatil, presqu'entièrement déſtitué d'eau & dont l'acidité eſt eſſentiellement pénétrante, ont engagés notre Académicien à repéter ſes eſſais ; ce qui l'a mis à portée de découvrir encore pluſieurs méthodes plus faciles & plus avantageuſes de préparer ce vinaigre glacial. Les trois ſuivantes ſont à ſon avis les meilleures.

1.) Pour obtenir ſous la forme de vinaigre glacial tout l'acide contenu dans le vinaigre concentré diſtillé, il faut le diſtiller fréquemment avec de la poudre de charbons. Cette diſtillation s'opere par le bain d'eau, jusqu'à ce qu'il ne paſſe plus rien, après quoi on fait ſuccéder celle du bain de ſable, où la force d'un feu plus violent fait monter encore une certaine quantité de vinaigre cryſtalliſable. On réitère cette diſtillation alternative du bain d'eau & de celui de ſable, jusqu'à ce qu'on s'apperçoive qu'il ne paſſe plus par le bain d'eau qu'une eau parfaitement inſipide. Si après ce procédé on expoſe tout le vinaigre obtenu du bain de ſable à un froid de 173°, l'acide qu'il contient ſe cryſtalliſera & formera le vinaigre glacial. On peut par un artifice opérer cette cryſtalliſation dans un degré de froid moins conſidérable; on n'a qu'a jetter un petit morceau de vinaigre glacial déja préparé dans le vinaigre qu'on ſe propoſe de cryſtalliſer, & qu'on aura préalablement fait refroidir; il ſe cryſtalliſera dans une température de 158°.

Cette

Cette méthode de préparer du vinaigre glacial par le moyen des charbons pulvériſés eſt à la vérité longue & pénible, mais le réſultat en eſt remarquable par ſa pureté. Les deux méthodes ſuivantes ſont d'une exécution beaucoup plus facile.

2.) On prépare de l'alkali végétal ou minéral acéteux, par le moyen de l'acide vitriolique concentré au ſuprème degré, un bon vinaigre concentré, qu'on nomme communement vinaigre de Weſtendorf. Ce vinaigre expoſé au froid ſe cryſtalliſe en vinaigre glacial. On peut auſſi faire ici uſage de l'artifice, dont il a déja été parlé plus haut, en jettant dans le vinaigre un morceau de vinaigre glacial tout préparé.

La gelée étant indiſpenſablement néceſſaire dans les deux méthodes précédentes, il eſt évident qu'on ne peut d'après elles préparer du vinaigre glacial qu'en hyver. La troiſième méthode que M. Lowitz expoſe, fait voir qu'on peut obtenir, ſans l'intervention de la gelée, un vinaigre glacial extrèmement fort, & qu'on en peut préparer dans chaque ſaiſon, même dans les contrées qui n'ont point d'hyver.

3.) Comme la préparation du vinaigre glacial exige que l'acide du vinaigre ſoit dégagé de toute particule aqueuſe, M. Lowitz ſoupçonna d'abord, que leur ſéparation pourroit bien être opérée par un ſel acéteux ſec, moyennant un diſſolvant dégagé d'eau. Tout occupé de cette idée il lui vint heureuſement dans l'eſprit que cette ſéparation pourroit bien être effectuée par l'alkali végétal vitriolé ſurſaturé, dont la préparation ſe fait, ſelon ſa méthode, de la maniere ſuivante:

On détrempe dans une cucurbite 7 parties d'huile vitriolique avec autant d'eau, après quoi on jette avec précaution, & auſſi promptement que poſſible, dans ce mélange encore chaud, 4 parties d'alkali végétal purifié ſec. Le mélange réfroidi, on décante la liqueur, & lave deux ou trois fois avec de l'eau froide les cryſtaux qui ſe ſont formés, obſervant que ce lavage exige une grande célérité, après quoi on ſeche les cryſtaux & on les réduit en poudre très fine. On peut par le moyen de ce ſel acide préparer immédiatement le vinaigre glacial le plus fort, de la manière ſuivante.

On fait fondre à un feu violent 3 parties d'alkali végétal ou minéral acéteux, puis on jette le ſel dans un mortier de pierre pour le réduire en une poudre très fine. Cette opération doit ſe faire avec une grande célérité, àfin que le ſel n'attire l'humidité de l'air. On y mêle 8 parties du ſel vitriolique dont je viens de parler, après l'avoir fait ſecher encore une fois; on jette enſuite le tout dans une retorte pour en diſtiller à feu lent le vinaigre glacial.

En procédant de cette maniere on retirera de 300 livres de vinaigre, 7 livres de vinaigre glacial.

La transformation de l'acide du vinaigre en vinaigre glacial n'en eſt en effet que la concentration pouſſée au ſuprême degré. Le peu d'eau qui s'y trouve joint doit être conſiderée non ſeulement comme eau de cryſtalliſation, mais même comme une partie conſtituante, ſans laquelle le vinaigre glacial ne pourroit exiſter dans ſon état fluide & concret. Car pluſieurs procédés prouvent que cet acide adopte une forme gazeuſe & permanente, ſi-tôt qu'il eſt parfaitement dépourvu d'eau. De là la multitude innombrable de bulles

d'air,

d'air, qui ſe développent lorsque l'acide ſe coagule; auſſi eſt-il certain que le vinaigre glacial perd inſenſiblement de ſa force par de fréquentes cryſtalliſations.

## V.

## De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio X^me^. De ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars II^da^.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 347.

En continuant ſes recherches ſur les fibres du coeur, M. Wolff conſidere ici la ſeconde couche des fibres du ventricule gauche en général, & particulièrement des deux premiers ordres des fibres de cette couche. Il démontre leur origine, leur progrès, leur inſertion, & remarque par tout, qu'avec la plus grande différence entre les fibres de cette couche & celles de la couche extérieure il-y-a pourtant entre elles une analogie parfaite, & que toute la diſpoſition des fibres du coeur, en général très-curieuſe & intéreſſante, mérite une attention particuliere de l'Anatomiſte, qui de longtems auroit ſouhaité de connoître plus exactement la ſtructure intérieure du coeur ainſi que les divers muſcles, dont il eſt compoſé, mais qui jamais n'a oſé ſe flatter, qu'en effet on parviendroit un jour, à analyſer toutes les fibres embarraſſées de ce myſtérieux viſcère, & à démontrer leur compoſition avec cette même exactitude & la même clarté, avec laquelle on décrit ordinairement le muſcle deltoïdée, ou le grand pectoral. (*)

k 2 Il

(*) Témoin le ſentiment & les propres travaux de feu Mr. de *Haller* ſur les fibres du coeur, dans ſes Elem. de Phyſiol. Tom. I. Liv. IV. §. XXI. pag.

Il reſte encore le troiſième & le quatrième ordre des fibres de la ſeconde couche, que l'Auteur ſe propoſe d'analyſer dans la ſuite.

---

pag. 351. 352. Le réſumé de ces travaux y eſt renfermé en quinze lignes, desquelles ce grand Anatomiſte dit, que c'eſt là tout ce qu'il a pû en connoître lui même par le ſcalpel anatomique.

## VI.

## Obſeruationes circa ſalis communis cryſtalliſationem ope frigoris efficiendam, et depurandi Salis huius methodus noua.

Auctore *Tob. Lowitz.* pag. 364.

Selon l'opinion généralement reçue, la cryſtalliſation du ſel de cuiſine ne peut s'opérer que par une évaporation continue de ſa ſolution, & non par ſon refroidiſſement. Cependant M. Lowitz trouve par des expériences qu'il fit en hyver l'an 1791, qu'il ſe cryſtalliſe auſſi par le refroidiſſement de ſa ſolution parfaitement ſaturée. Le moindre froid qu'exige cette opération doit être de 168 degrés de Délisle. En ce cas le ſel de cuiſine ſe cryſtalliſe en forme de tablettes hexagones, qui ſont quelque fois d'une grandeur aſſes conſidérable. L'eau de cryſtalliſation de ces cryſtaux parfaitement transparens eſt de 49 dans la centaine. À l'air libre ſec & très froid ils ſe réduiſent, comme le ſel de Glauber, en poudre farineuſe. Mais la moindre température naturelle de 143° les fait refondre dans leur eau de cryſtalliſation. Il eſt donc abſolument impoſſible de les conſerver dans une chambre chaude, ou pendant l'été.

Ce-

Cependant cette diſſolution diffère de celle du ſel de Glauber en ce que la derniere eſt entièrement fluide, & que l'autre ne l'eſt qu'en partie, c'eſt-à-dire que l'eau de cryſtalliſation des cryſtaux dont il eſt queſtion n'eſt pas ſuffiſante pour l'état de fluidité parfaite. C'eſt à deſſein que M. Lowitz dit fluidité parfaite, parceque dans les cryſtaux mêmes ou dans l'état concret elle s'y trouve intimement liée; c'eſt ce que prouve la diaphanéité. Cette circonſtance qui ſemble contraire aux idées qu'on a eues jusqu'apréſent de la diſſolution, peut ouvrir une carrière aux réflexions du chymiſte. La ſolution des cryſtaux du ſel de cuiſine eſt donc jointe à une précipitation ou cryſtalliſation neuve, accélerée par une partie conſidérable du ſel ſous une forme de poudre, dont les grains menus préſentent des cubes. Cette même circonſtance fournit encore un moyen nouveau de purifier le ſel de cuiſine. On procède de la maniere ſuivante.

On jette dans un paſſoire les cryſtaux de ſel de cuiſine obtenus par le froid, après avoir pris ſoin de mettre un vaſe deſſous. Les cryſtaux ſe précipitent & laiſſent paſſer une diſſolution ſaturée de ſel. Le ſel fin qui reſte dans le paſſoire, après être ſeché, eſt le ſel de table le plus fin.

## VII.

## Obſervations ſur les eaux martiales du Gouvernement d'Olonetz.

Par M. *Ozeretskovski.* pag. 370.

Dans ce mémoire ſe trouve d'abord une énumération des minéraux découverts dans ce Gouvernement: ils ſont pau-

vres en métaux. M. Ozeretskovski paſſe enſuite aux eaux martiales, dont il donne la déſcription, ainſi que des mines de fer qu'elles dépoſent & qui ſont employées à la fonte des canons. Il y a une abondance du ſchiſte pyriteux aux environs du lac d'Onega, qui ſe décompoſe en terres ferrugineuſe & vitriolique, dont les eaux martiales ſont impregnées. Elles contiennent en outre une portion de terre alumineuſe. Leur uſage ne peut point être ſalutaire; les mines de fer qui proviennent du ſchiſte décompoſé ne ſont pas de bonne qualité. La terre vitriolique dont on fabrique la couperoſe verte y eſt très abondante. Si l'on fouilloit le ſchiſte pyriteux, on découvriroit peut-être ou des ardoiſes ou des charbons de terre.

---

CLAS-

# CLASSE D'ASTRONOMIE ET DE MÉTÉOROLOGIE.

## I.

## Obſeruationes nonnullae aſtronomicae Petropoli habitae.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 379.

L'Auteur rapporte quelques immerſions & émerſions des Satellites de Jupiter dont il a pu faire l'obſervation pendant l'eſpace d'onze années conſécutives, & parmi lesquelles ſe trouve auſſi une occultation de l'étoile $\gamma$ de la Vierge par la Lune, obſervée en 1780 le $\frac{9}{20}$ Mars. On peut conclure par ce petit nombre d'obſervations, combien peu la conſtitution de l'Atmoſphère à St. Pétersbourg ſe trouve favorable aux Aſtronomes.

## II.

## Déſcription d'un Météore rémarquable obſervé à St. Pétersbourg le 18 Juin 1790.

Par M. *Lowitz*, pag. 384.

Cette déſcription contient tous les détails d'un phénomène des plus brillans qui a duré depuis 7 heures & demie du

du matin jusqu'à 12 heures du midi paſſées. À 10 heures avant midi il avoit atteint ſa plus grande perfection, & il étoit alors compoſé de douze arcs divers dont neuf étoient colorés, & de cinq parhélies bien términés & luiſans.

## III.

## Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1790.

Pag. 389.

La plus grande hauteur du Baromètre 29, 09 pouces de France, la plus petite 26, 96, le milieu arithmétique 28, 025 & la hauteur moyenne 28, 082.

Il n'y a eu ni de grands froids ni de fortes chaleurs: le plus grand froid s'eſt trouvé être de $20\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur, & la plus grande chaleur de $18\frac{2}{3}$ degrés.

Le mois de Février a été le plus venteux, & ceux d'Août, d'Octobre & de Novembre les plus calmes. Le vent dominant s'eſt trouvé être celui du Sud - Oueſt.

Le nombre des jours entièrement ſereins n'a été que de 68, & celui des jours entièrement couverts de 116. Il a plu en 131 jours & il a neigé en 77 jours.

Le nombre des orages ne monte qu'à quatre, & il n'y a eu auſſi que quatre aurores boréales d'obſervées.

MA-

# CLASSIS MATHEMATICA

ET

# PHYSICO-MATHEMATICA.

# VARIAE CONSIDERATIONES
## CIRCA
## SERIES HYPERGEOMETRICAS.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die 19 Aug. 1776.*

1.

Propoſito hoc producto in infinitum excurrente:
$\frac{a(a+2b)}{(a+b)(a+b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+4b)}{(a+3b)(a+3b)} \cdot \frac{(a+4b)(a+6b)}{(a+5b)(a+5b)} \cdot \frac{(a+6b)(a+8b)}{(a+7b)(a+7b)}$ &c. $= \frac{P}{Q}$,
conſtat eſſe

$$P = \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

his integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſis; vbi notetur illius producti membrum indici $i$ reſpondens eſſe

$$\frac{[a+(2i-2)b](a+2ib)}{[a+(2i-1)b]\,[a+(2i-1)b]}.$$

§. 2. Iam occaſione iſtius producti conſideremus ſequens productum indefinitum, in quo factorum numerus ſit $= n$, ac ponatur

$$a(a+2b)(a+4b)(a+6b)\ldots\ldots[a+(2n-2)b] = \Delta:n,$$

ſiquidem hoc productum, ob $a$ & $b$ numeros datos, ſpectari poteſt tanquam certa functio ipſius $n$; ex eius igitur natura perſpicuum eſt fore

$$\Delta:(n+1) = \Delta:n\,.\,(a+2nb),$$

ſimilique modo

$$\Delta:(n+2) = \Delta:(n+1)\,.\,[a+(2n+2)b],$$

et ita porro.

 Hinc

Hinc ſi $i$ denotet numerum infinite magnum, erit

$$\Delta : i = a\,(a + 2\,b)\,(a + 4\,b)\,(a + 6\,b) \ldots\ldots [a + (2\,i - 2)\,b],$$

vnde pariter colligitur fore

$$\Delta : (i + 1) = \Delta : i\,.\,(a + 2\,i\,b),$$

$$\Delta : (i + 2) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)\,[a + (2\,i + 2)\,b],$$

$$\Delta : (i + 3) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)\,[a + (2\,i + 2)\,b]\,[a + (2\,i + 4)\,b],$$

ubi factores inſuper accedentes tanquam inter ſe aequales ſpectari poterunt; quamobrem in genere ſtatui poterit $\Delta : (i + n) = \Delta : i\,(a + 2\,i\,b)^n$, vbi cum $(a + 2\,i\,b)$ ſit factor proxime ſequens, eodem iure quilibet ſequentium ſumi potuiſſet, ex quo adhuc generalius ſtatuere poterimus

$$\Delta : (i + n) = (\alpha + 2\,i\,b)^n\,\Delta : i,$$

denotante $\alpha$ numerum quemcunque finitum, quippe qui prae $2\,i\,b$ euaneſcit.

§. 3. In computum nunc ducamus caſum producti indefiniti, quo $n = \frac{1}{2}$, ac vocemus $\Delta : \frac{1}{2} = k$, quem valorem ope methodi interpolationum ſemper vero proxime aſſignare licet. Hinc igitur per ſuperiora erit

$$\Delta : (1 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b);$$

$$\Delta : (2 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b),$$

$$\Delta : (3 + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b)\,(a + 5\,b),$$

vnde in infinitum progrediendo erit

$$\Delta : (i + \tfrac{1}{2}) = k\,(a + b)\,(a + 3\,b)\,(a + 5\,b) \ldots\ldots [a + (2\,i - 1)\,b].$$

§. 4. Cum igitur ſupra iam dederimus formulam pro $\Delta : (i + n)$, poſito nunc $n = \frac{1}{2}$ habebimus quoque

$$\Delta : (i + \tfrac{1}{2}) = \Delta : i\,\sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)},$$

ſicque pro eadem formula $\Delta : (i + \frac{1}{2})$ nacti ſumus duas diuerſas expreſſiones, ex iisque conficitur iſta aequatio:

$\Delta$ :

$$\Delta : i \sqrt{(a+2ib)} = k(a+b)(a+3b)(a+5b) \ldots [a+(2i-1)b],$$

atque hinc concludere poterimus, valorem ipſius producti infiniti

$$(a+b)(a+3b)(a+5b) \ldots\ldots [a+(2i-1)b] = \frac{\Delta : i \sqrt{(a+2ib)}}{k},$$

ſicque innoteſcit relatio inter hoc productum et id quod ſupra per $\Delta : i$ expreſſimus. Hic autem probe notandum eſt factores huius producti eos ipſos eſſe, qui denominatorem producti initio propoſiti conſtituunt, quamobrem tam numeratorem illius producti quam denominatorem per valores modo inuentos $\Delta : i$ et $\frac{\Delta : i \sqrt{(a+2ib)}}{k}$ exprimere poterimus.

§. 5. Numerator autem producti propoſiti in infinitum expanſus ita repraeſentari poteſt:

$$a(a+2b)^2 (a+4b)^2 \ldots\ldots [a+(2i-2)b]^2 (a+2ib),$$

vbi factores primus et vltimus ſunt ſolitarii, reliqui vero omnes quadrati. Cum igitur ſit

$$(\Delta : i)^2 = (a)^2 (a+2b)^2 (a+4b)^2 (a+6b)^2 \ldots\ldots [a+(2i-2)b]^2,$$

euidens eſt illum numeratorem eſſe $\frac{(\Delta : i)^2}{a}(a+2ib)$. Pro denominatore autem per ſe manifeſtum eſt, eum eſſe aequalem quadrato producti alterius $(a+b)(a+3b)$ &c., cuius valor cum repertus ſit $\frac{\Delta : i \sqrt{(a+2ib)}}{k}$, denominator erit $\frac{(\Delta : i)^2 (a+2ib)}{kk}$, quamobrem his valoribus ſubſtitutis pro fractione ſupra expoſita $\frac{P}{Q}$ aſſecuti ſumus hanc aequationem:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{(\Delta : i)^2 (a+2ib)}{a}}{\frac{(\Delta : i)^2 (a+2ib)}{kk}} = \frac{kk(a+2ib)}{a(a+2ib)} = \frac{kk}{a},$$

Ex hac aequatione igitur ſtatim innoteſcit verus valor formulae interpolatae $k = \Delta : \frac{1}{2}$, quandoquidem erit $\Delta : \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{aP}{Q}}$, atque hinc porro ſequentes:

$$\Delta : (1 + \tfrac{1}{2}) = (a + b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}},$$
$$\Delta : (2 + \tfrac{1}{2}) = (a + b)(a + 3\,b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}},$$
$$\Delta : (3 + \tfrac{1}{2}) = (a + b)(a + 3\,b)(a + 5\,b) \sqrt{\tfrac{a\,P}{Q}}, \text{ etc.}$$

haecque interpolatio eo magis eſt notatu digna, quod ſine approximatione ſtatim verum valorem horum terminorum interpolatorum ſuppeditat.

§. 6. Quod ſi inſuper iſtud productum infinitum, in quo vtrique factores coniunguntur, contemplemur, ac ſtatuamus

$$a(a+b)(a+2\,b)(a+3\,b) \ldots\ldots [a+(i-1)\,b] = \Gamma : i, \text{ erit}$$
$$\Gamma : 2\,i = a(a+b)(a+2\,b)(a+3\,b) \ldots\ldots [a+(2\,i-1)\,b],$$

quod manifeſto eſt productum ex binis ſuperioribus, ita vt ſit $\Gamma : 2\,i = \frac{(\Delta : i)^2 \sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}{k}$; vnde ſi forma $\Gamma : 2\,i$ vti voluerimus, valores amborum praecedentium ex eo aſſignare poterimus, cum ſit $\Delta : i = \sqrt{\frac{k \,.\, \Gamma : 2\,i}{\sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}}$, qui eſt ipſe valor prioris producti

$$a(a+2\,b)(a+4\,b)(a+6\,b), \text{ etc.}$$

alterius vero producti

$$(a+b)(a+3\,b)(a+5\,b) \text{ etc. valor erit } \sqrt{\frac{\Gamma : 2\,i(\sqrt{\alpha + 2\,i\,b})}{k}}.$$

§. 7. Hactenus igitur tria producta in infinitum excurrentia atque inter ſe affinia ſumus contemplati, quae, quoniam ea accuratius ſumus perſcrutaturi, hic denuo ob oculos exponamus

$$\text{I. } a(a+b)(a+2\,b)(a+3\,b) \ldots\ldots [a+(i-1)\,b] = \Gamma : i,$$
$$\text{II. } a(a+2\,b)(a+4\,b)(a+6\,b) \ldots\ldots [a+(2\,i-2)\,b] = \Delta : i,$$
$$\text{III. } (a+b)(a+3\,b)(a+5\,b) \ldots\ldots [a+(2\,i-1)\,b] = \Theta : i,$$

atque iam inuenimus eſſe $\Theta : i = \frac{\Delta : i \sqrt{(\alpha + 2\,i\,b)}}{k}$; tum vero tam $\Delta : i$ quam $\Theta : i$ ſequenti modo per functionem $\Gamma : 2\,i$ expreſſimus:

$\Delta : i$

$$\Delta : i = \sqrt{\frac{k . \Gamma : 2i}{\sqrt{(a+2ib)}}} \text{ et } \Theta : i = \sqrt{\frac{\Gamma : 2i\sqrt{(a+2ib)}}{k}},$$

quandoquidem manifeſtum eſt eſſe $\Gamma : 2\,i = \Delta : i . \Theta : i$; vbi meminiſſe oportet eſſe $k = \Delta : \frac{1}{2}$, quod ſcilicet ex forma ſecunda definiri debet, conſiderando ſeriem

$a$, $a(a+2b)$, $a(a+2b)(a+4b)$, $a(a+2b)(a+4b)(a+6b)$, etc. cuius terminum indici $\frac{1}{2}$ reſpondentem deſignauimus hac littera $k$.

§. 8. Iam ad iſtas formas accommodemus methodum generalem ſummandi omnis generis progreſſiones per terminum earum generalem, quae ita ſe habet, vt propoſita ſerie quacunque A, B, C, D, E, etc. cuius terminus indici indefinito $x$ reſpondens ſit $=$ X, eius ſumma

$$A + B + C + D + \ldots\ldots\ldots + X,$$

quam vocemus $=$ S, ſit

$$S = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{1}{1 \ldots 5} \cdot \frac{1}{6} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{1}{1 \ldots 7} \cdot \frac{1}{6} \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

vbi fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, etc. ſunt numeri Bernoulliani.

## Euolutio formae primae.

$$a\,(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b) \ldots\ldots [a+(i-1)\,b] = \Gamma : i.$$

§. 9. Cum numerus factorum hic conſideretur vt infinitus, quo methodum ſummandi ad eam applicare valeamus, conſideremus eandem formam numero terminorum finito $= x$ conſtantem, ac ſtatuamus ſimili modo

$$a\,(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b) \ldots\ldots\ldots [a+(x-1)\,b] = \Gamma : x.$$

Nunc vero vt loco huius producti ſeriem ſummandam nanciſcamur, ſumamus logarithmos, eritque

$$l\Gamma : x = la + l(a+b) + l(a+2\,b) + l(a+3b) \ldots . l\,[a+(x-1)b],$$

cuius ergo ſumma cum fuerit explorata, dabit logarithmum formulae

mulae $\Gamma : x$, ideoque ipſam formulam $\Gamma : x$, in qua ſi deinceps ſtatuatur $x = i$, obtinebitur formula $\Gamma : i$, quem valorem in ſuperioribus potiſſimum ſpectauimus. Hinc igitur, comparatione cum ſerie generaliſſima inſtituta, erit $X = l\,[a + (x - 1)\,b]$, atque ipſa ſumma $S = l\,\Gamma : x$, ſiue erit $X = l\,(a - b + b\,x)$, vnde colligitur $\int X\,\partial x = \int \partial x\, l\,(a - b + b\,x)$.

§. 10. Cum igitur ſit $\int \partial z\, l\, z = z\, l\, z - z$, atque

$$\int \partial y\, l\,(a + y) = (a + y)\, l\,(a + y) - (a + y),$$

nunc loco $y$ ſcribendo $b\,x$ erit

$$\int b\,\partial x\, l\,(a + b\,x) = (a + b\,x)\, l\,(a + b\,x) - a - b\,x,$$

ideoque

$$\int \partial x\, l\,(a + b\,x) = \frac{(a + b\,x)}{b}\, l\,(a + b\,x) - \frac{a}{b} - x,$$

vnde colligitur pro noſtro caſu fore:

$$\int X\,\partial x = \frac{(a - b + b\,x)}{b}\, l\,(a - b + b\,x) - \frac{a}{b} + 1 - x,$$

vbi in vltima parte membrum conſtans $\frac{a}{b} - 1$ omittere licet, quia expreſſio conſtantem quantitatem indefinitam per ſe poſtulat, quam deinceps ex indole ſeriei definiri oportet. Deinde vero erit $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{b}{a - b + b\,x}$; tum vero porro

$$\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = \frac{2\,b^3}{(a - b + b\,x)^3};\quad \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} = \frac{2.\,3.\,4\,b^5}{(a - b + b\,x)^5};\ \text{etc.}$$

quibus valoribus in vſum vocatis erit

$$l\,\Gamma : x = A + \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + x\right) l\,(a - b + b\,x) - x + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a - b + b\,x}$$
$$- \frac{1}{3.4.5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{b^3}{(a - b + b\,x)^3} + \frac{1}{5.6.7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{b^5}{(a - b + b\,x)^5}$$
$$- \frac{1}{7.8.9}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{b^7}{(a - b + b\,x)^7} + \frac{1}{9.10.11}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{b^9}{(a - b + b\,x)^9} - \text{etc.}$$

vbi littera A conſtantem denotat ex indole ſeriei definiendam.

§. 11. Conſtans autem iſta A ex caſu quo ſumma ſeriei eſt cognita determinari debet, quod ergo fieri poſſet ex

caſu

caſu $x = 0$, quippe ſumma etiam nihilo aequalis prodire debet; foret igitur hinc

$$A = (\tfrac{a}{b} - \tfrac{1}{2})\, l\,(a-b) + \tfrac{1}{1.2.3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{b}{a-b} - \tfrac{1}{3.4.5} \cdot \tfrac{1}{6}\, \tfrac{b^3}{(a-b)^3}$$
$$+ \tfrac{1}{5.6.7} \cdot \tfrac{1}{6}\, \tfrac{b^5}{(a-b)^5} - \text{etc.}$$

Quoniam autem haec ſeries parum conuergit, atque adeo caſu $b = a$ omnes termini fierent infiniti, hinc nihil plane lucrari licet. Sin autem vellemus ſumere $x = 1$, iſta ſumma prodire deberet $= l\,a$, vnde pariter vix quicquam pro inſtituto noſtro concludere liceret, quia ſemper ad ſeriem infinitam perueniretur, cuius ſummam demum explorare oporteret, in quo quidem negotio forſitan ea, quae olim de ſeriebus numeros Bernoullianos inuoluentibus ſum commentatus, aliquem vſum praeſtare poſſent, cui autem labori nunc immorari non vacat.

§. 12. Quia enim in praeſenti inſtituto potiſſimum ad valorem $\Gamma : i$ reſpicimus, ſufficiet ſtatim loco $x$ numerum infinitum ſtatui. Sit igitur $x = i$, denotante $i$ numerum infinite magnum, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$l\,\Gamma : i = A + (\tfrac{a}{b} - \tfrac{1}{2} + i)\, l\,(a - b + b\,i) - i,$$

vnde conſtans iſta A ſponte determinatur, quam idcirco quaſi iam cognitam ſpectabimus. Hinc ergo ad numeros regrediendo, vbi quidem loco A ſcriptum intelligamus $l$ A, perueniemus ad hanc expreſſionem:

$$\Gamma : i = A\,(a - b + b\,i)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + i} \cdot e^{-i}.$$

Hic quidem conueniet poteſtatem exponentis $i$ ſeorſim repraeſentare hoc modo:

$$\Gamma : i = A\,(a - b + b\,i)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + b\,i)^{i} \cdot e^{-i}.$$

## Euolutio binarum reliquarum formularum.

§. 13. Secunda forma a prima in eo tantum diſcrepat, quod loco $b$ hic ſcribi oportet $2b$, vnde noua euolutione carere poſſumus; at vero loco conſtantis A hic ſcribamus B, quandoquidem nondum conſtat, quemadmodum littera $b$ in conſtantem A ingrediatur. Hoc modo igitur ſtatim habebimus

$$\Delta : i = B\,(a - 2b + 2bi)^{\frac{a}{2b} - \frac{1}{2}}\,(a - 2b + 2bi)^i\, e^{-i}.$$

Simili modo euidens eſt, ex hac ſecunda forma oriri tertiam, ſi modo loco $a$ ſcribatur $a + b$, vnde loco B conſtantem C introducendo, habebimus

$$\Theta : i = C\,(a - b + 2bi)^{\frac{a}{2b}}\,(a - b + 2bi)^i\, e^{-i}.$$

Vbi notetur litteram $e$ hic poſitam eſſe pro numero cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$.

## Concluſiones hinc oriundae.

§. 14. Videamus nunc quomodo iſtae nouae determinationes ſe reſpectu relationum ſupra inuentarum ſint habiturae; quare cum ex his nouis valoribus ſit

$$\Gamma : 2i = A\,(a - b + 2bi)^{\frac{a}{b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + 2bi)^{2i}\, e^{-2i},$$

quia inuenimus:

$$\Gamma : 2i = \Delta : i \times \Theta : i,$$

ſi vbique hic valores modo inuentos ſubſtituamus, habebimus pro iſta aequatione primo productum:

$$\Delta : i \,.\, \Theta : i = B\,C\,(a - 2b + 2bi)^{\frac{a}{2b} - \frac{1}{2}}\,(a - b + 2bi)^{\frac{a}{2b}}$$
$$(a - 2b + 2bi)^i\,(a - b + 2bi)^i\, e^{-2i},$$

quod cum eſſe debeat illi valori $\Gamma : 2i$ aequale, ſi per factores quos habeat communes vtrinque diuidamus, prodibit iſta aequatio:

A

$$A(a-b+2bi)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}(a-b+2bi)^i$$
$$=BC(a-2b+2bi)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}(a-2b+2bi)^i.$$

§. 15. Diuidamus hanc aequationem vtrinque per $(a-2b+2bi)^i$, et cum ſit

$$\frac{a-b+2bi}{a-2b+2bi}=1+\frac{b}{a-2b+2bi}=1+\frac{1}{2i},$$

ob $i$ numerum infinitum, per reſolutionem ordinariam erit $(1+\frac{1}{2i})^i=e^{\frac{1}{2}}$, vnde aequatio noſtra reducitur ad hanc formam:

$$A(a-b+2bi)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2}}=BC(a-2b+2bi)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}},$$

vbi vltimi factores quoque ſe tollunt, cum ſit

$$\left(\frac{a-b+2bi}{a-2b+2bi}\right)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}=1,$$

ita vt peruentum ſit ad hanc ſimplicem aequalitatem:

$$Ae^{\frac{1}{2}}=BC.$$

§. 16. Deinde cum ſupra inuenerimus eſſe

$$\Theta:i=\frac{\Delta i\sqrt{(\alpha+2ib)}}{k},\ \text{ſiue}\ \frac{\Theta:i}{\Delta:i}=\frac{\sqrt{(\alpha+2ib)}}{k},$$

diuidamus valorem pro $\Theta:i$ inuentum per $\Delta:i$, ac reperiemus:

$$\frac{\Theta:i}{\Delta:i}=\frac{C}{B}\sqrt{(a-2b+2bi)}\left(\frac{a-b+2bi}{a-2b+2bi}\right)^i=\frac{C}{B}\sqrt{e(a-2b+2bi)}.$$

Erit ergo

$$\frac{\sqrt{(\alpha+2ib)}}{k}=\frac{C}{B}\sqrt{e(a-2b+2bi)},\ \text{ſiue}$$
$$\frac{1}{k}=\frac{C}{B}\sqrt{\frac{e(a-2b+2bi)}{\alpha+2ib}}=\frac{C}{B}\sqrt{e},$$

ſiue erit $B=Ck\sqrt{e}$.

 §. 17.

§. 17. Nacti ergo ſumus eiusmodi binas relationes inter ternas illas conſtantes A, B, C, vt ſi earum vnica eſſet cognita, ex ea binae reliquae definiri poſſent. Cum enim ſit $A = \frac{BC}{\sqrt{e}}$ et $B = Ck\sqrt{e}$, ſi conſtantem A ſpectemus vt iam cognitam, binae reliquae ſequenti modo determinabuntur: Cum ſit $B = Ck\sqrt{e}$, hic valor in priore aequatione ſubſtitutus dat $A = CCk$, vnde elicitur $C = \sqrt{\frac{A}{k}}$, hincque porro $B = \sqrt{kAe}$. Interim tamen hinc non patet, quomodo conſtans A abſolute determinari queat; ideoque recurrendum erit ad ipſam illam ſummationem ſeriei logarithmicae, quam littera A ſupra indicauimus; vbi autem loco A ſcribendum erit $lA$. Atque hinc tantum ſumus lucrati, vt ſi binae reliquae formae ſimili modo euoluantur per ſeries logarithmicas, conſtantes ibi adhibendae, ſcilicet $lB$ et $lC$ ſimul innoteſcant.

§. 18. Supereſt vt adhuc pauca addamus de valore litterae $k$, quam per interpolationem inueniri debere iam ſupra monuimus. Interim tamen haec littera etiam ex ipſa comparatione formularum $\Delta : i$ et $\Theta : i$ abſolute per certas quadraturas determinari poteſt. Cum enim ſit

$$k = \frac{\Delta : i}{\Theta : i}\sqrt{(\alpha + 2ib)}, \text{ ideoque}$$

$$kk = \frac{(\Delta : i)^2 (\alpha + 2ib)}{(\Theta : i)^2},$$

ſi loco $\Delta : i$ et $\Theta : i$ ipſa producta infinita ſubſtituamus, et, quoniam vtrumque ex $i$ factoribus conſtat, hic autem in numeratore vnus factor $a + 2ib$ inſuper accedit, primum numeratoris factorem ſeorſim exprimamus, hoc pacto perueniemus ad ſequens productum determinatum:

$$kk = a \cdot \frac{a(a+2b)(a+2b)(a+4b)(a+4b)(a+6b)}{(a+b)(a+b)(a+3b)(a+3b)(a+5b)(a+5b)} \text{ etc.}$$

§. 19. Vt autem huius producti infiniti verum valorem eruamus, recordandum eſt, ſi litterae P et Q denotent ſequentes formulas integrales:

$$P = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}},$$

quae integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$, extendi ſunt intelligenda, tum per productum infinitum fore:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q(m+p)}{p(m+q)} \cdot \frac{(q+n)(m+p+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdot \frac{(q+2n)(m+p+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)} \text{ etc.}$$

quod productum facile ad noſtram formam reducitur, ſumendo $q = a$, $p = a + b$, $m = b$, $n = 2b$, ita vt pro noſtro caſu fiat

$$P = \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

tum vero erit $kk = \frac{aP}{Q}$, ideoque $k = \sqrt{\frac{aP}{Q}}$, ſicque eundem valorem $k$ alio modo elicuimus, quem iam ſupra attulimus.

§. 20. Quemadmodum autem eſt $k = \Delta : \frac{1}{2}$, ſimili modo pro binis reliquis formis poterimus aſſignare valores $\Gamma : \frac{1}{2}$ et $\Theta : \frac{1}{2}$. Cum enim forma $\Gamma$ oriatur ex forma $\Delta$, ſi in hac loco $b$ ſcribatur $\frac{1}{2}b$, forma autem $\Theta$ oriatur ex $\Delta$, ſi loco $a$ ſcribatur $a + b$, his obſeruatis erit

$$\Gamma : \tfrac{1}{2} = \sqrt{a \frac{\int x^{a+\frac{1}{2}b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^b)}}{\int x^{a-1}\partial x : \sqrt{(1-x^b)}}} \text{ et}$$

$$\Theta : \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a+b)\frac{\int x^{a+2b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}{\int x^{a+b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}}.$$

Facile autem intelligitur, valorem $\Theta : \frac{1}{2}$ aeque in noſtros calculos introduci potuiſſe ac $\Delta : \frac{1}{2} = k$, cum ſit $\Delta : \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \frac{1}{2} = a$.

 Ductis

Ductis enim in ſe inuicem illis valoribus integralibus prodit

$$\Delta : \tfrac{1}{2} . \Theta : \tfrac{1}{2} = \sqrt{\frac{a(a+b)\int x^{a+2b-1}\partial x : \sqrt{(1-x^{2b})}}{\int x^{a-1}\partial x : (1-x^{2b})}},$$

ex notiſſima autem reductione talium integralium conſtat eſſe

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}} = \frac{a}{a+b}\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

pro terminis ſcilicet integrationis $x=0$ et $x=1$, ſicque perſpicuum eſt fore $\Delta : \tfrac{1}{2} . \Theta : \tfrac{1}{2} = a$. Quemadmodum autem valor $\Gamma : \tfrac{1}{2}$ ad binos reliquos referatur, nullo modo definiri poteſt.

DE

# DE VERO VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

## $\int \partial x \, (l \frac{1}{x})^n$

## A TERMINO $x = 0$ VSQVE AD TERMINVM $x = 1$ EXTENSAE.

Auctore

*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die* 30 *Sept.* 1776.

§. 1.

Cum haec formula exprimat aream curuae tranſcendentis, cuius abſciſſae $x$ reſpondet applicata $= (l \frac{1}{x})^n$; quaeſtio huc redit, vt eadem area, quatenus abſciſſae $x = 1$ conuenit, vel per numeros abſolutos, vel ſaltem per quadraturas curuarum algebraicarum exhibeatur. Ac primo quidem manifeſtum eſt, quoties exponens $n$ fuerit numerus integer, hanc formulam integralem ſiſtere terminum generalem progreſſionis hypergeometricae, cum ſit

$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^0 = 1,$$
$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^1 = 1$$
$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^2 = 1 \cdot 2,$$
$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$

atque adeo in genere

$$\int \partial x \, (l \tfrac{1}{x})^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \ldots n$$

quem autem valorem cognoſcere non datur, niſi exponens $n$ fuerit

fuerit numerus integer poſitiuus; praeterea vero ſi exponens $n$ fuerit numerus integer negatiuus, ex indole ſeriei hypergeometricae facile perſpicitur valores noſtrae formulae omnes fieri infinite magnos. Quaeſtio igitur hic potiſſimum complectetur caſus, quibus exponens $n$ eſt numerus fractus, quibus vtique valor noſtrae formulae neutiquam per numeros abſolutos aſſignari poteſt, ſed potius quadraturas curuarum algebraicarum eo altiorum ordinum poſtulat, quo maior fuerit denominator fractionis pro $n$ aſſumtae, quemadmodum iam olim fuſius monſtraui. Nuper autem ſe mihi obtulit alia methodus eosdem valores transcendentes inueſtigandi, quam ergo hic explicare conſtitui; cum inde haud contemnenda incrementa in Analyſin redundare videantur.

§. 2. Ante omnia igitur ſtatuamus breuitatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, vt ſit $\partial u = -\frac{\partial x}{x}$, ideoque $\partial x = -x\,\partial u$. Hinc ſtatim inſignes reductiones ope lemmatis vulgatiſſimi, quo eſt $\int P\,\partial Q = PQ - \int Q\,\partial P$, deriuari poſſunt. Sumto enim $P = u^n$ et $\partial Q = \partial x$, ob $\partial P = n u^{n-1}\,\partial u = -\frac{n u^{n-1}\,\partial x}{x}$ et $Q = x$, hoc Lemma nobis praebet

$$\int u^n\,\partial x = x u^n + n\int u^{n-1}\,\partial x.$$

Deinde cum ſit $u^n\,\partial x = -x^n\,\partial u$, ſi hic capiatur $P = -x$ et $\partial Q = u^n\,\partial u$, ob $\partial P = -\partial x$ et $Q = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$, habebimus

$$\int u^n\,\partial x = -\frac{1}{n+1}x u^{n+1} + \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,\partial x.$$

Quare, quoniam haec integralia ita capi debent, vt euaneſcant poſito $x = 0$, tum vero ſtatui debet $x = 1$, notum eſt tum membra abſoluta in his reductionibus in nihilum abire, ita vt pro hoc caſu, de quo hic vnice agitur, ſit $\int u^n\,\partial x = n\int u^{n-1}\,\partial x$ tum vero etiam $\int u^n\,\partial x = \frac{1}{n+1}\int u^{n+1}\,\partial x$, quae quidem poſterior reductio ſponte ex priori fluit.

§. 3.

§. 3. Quod autem formula $x u^n$ caſu $x = 0$ ſemper euaneſcat, vulgo non ſatis directe demonſtrari ſolet, atque adeo dubium videri queat, propterea quod poſito $x = 0$ fiat $u^n = \infty$; at vero haec veritas ſequenti modo rigoroſe oſtendi poteſt: Namque pro caſu $x = 0$ ſtatuamus $x u^n = v$, ita vt valor huius litterae $v$ nobis ſit explorandus, quem ergo ita per fractionem repraeſentemus: $v = \frac{x}{u^{-n}}$, cuius tam numerator quam denominator caſu $x = 0$ euaneſcit, vnde per regulam communem tam loco numeratoris quam denominatoris eorum differentialia ſcribantur, et quia valor ipſius $v$ idem prodire debet, erit quoque

$$v = \frac{\partial x}{-n u^{-n-1} \partial u} = \frac{+x}{n u^{-n-1}} \left(\text{ob } \partial u = -\frac{\partial x}{x}\right).$$

Cum igitur ex priore valore ſit $v = x u^n$, ex poſteriori vero $v = \frac{1}{n} x u^{n+1}$, inde fiet $v^{n+1} = x^{n+1} u^{n(n+1)}$, hinc vero

$$v^n = \left(\frac{x}{n}\right)^n u^{n(n+1)},$$

quorum valorum ille per hunc diuiſus dabit $v = n^n x$, haecque expreſſio pariter verum valorem ipſius $v$ pro caſu $x = 0$ exhibere debet, hic autem poſito $x = 0$ manifeſto fit $v = 0$.

§. 4. Quoniam noſtra inueſtigatio hic potiſſimum ad caſus, quibus exponens $n$ eſt fractio, reſtringitur, ope reductionis $\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$ omnes fractiones loco $n$ aſſumtae, quantumuis fuerint magnae, continuo vnitate diminui ideoque tandem adeo infra vnitatem deprimi poterunt, ita vt intra limites 0 et 1 contineantur. Deinde vero ope alterius reductionis: $\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, ſi forte exponens $n$ fuerit fractio negatiua, tandem eius valor pariter ad fractionem inter limites 0 et 1 redigi poterit; vnde nobis hoc loco ſufficiet

eos tantum caſus euoluiſſe, quibus fractiones pro $n$ aſſumtae intra limites o et I conſiſtunt; haeque fractiones commode in varias claſſes diſtribuuntur, prouti denominatores harum fractionum fuerint vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, etc.

§. 5. Cum nuper ſeries, quae ex vnciis poteſtatum Binomii formantur, eſſem contemplatus, oſtendi, ſi ponatur $(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3$, etc. tum vero etiam $(1+z)^n = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$, etc. tum ſummam huius ſeriei $1 + A\alpha + B\beta + C\gamma +$ etc. $= s$, ita exprimi poſſe, vt ſit $s = \int \frac{u^{m+n}\partial x}{\int u^m \partial x . \int u^n \partial x}$, quae ergo ſumma per valores formulae integralis propoſitae definitur; deinde vero etiam monſtraui, eandem ſummam quoque hoc modo exprimi poſſe:

$$s = \frac{m+n}{mn\int x^{m-1}\partial x(1-x)^{n-1}},$$

vnde ergo ſequitur ſemper fore

$$\frac{m+n}{mn}\int u^m \partial x . \int u^n \partial x = \int u^{m+n}\partial x . \int x^{m-1}\partial x(1-x)^{n-1},$$

ſiquidem ſingula haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur.

§. 6. Quoniam autem praeſens noſtrum inſtitutum circa fractiones, easque vnitate minores, verſatur, ponamus in genere $m = \frac{\mu}{\lambda}$ et $n = \frac{\nu}{\lambda}$, ita vt ſit

$$\frac{\lambda(\mu+\nu)}{\mu\nu}\int u^{\frac{\mu}{\lambda}}\partial x . \int u^{\frac{\nu}{\lambda}}\partial x = \int u^{\frac{\mu+\nu}{\lambda}}\partial x \int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x(1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}}.$$

Nunc vero vt poſtremam formulam integralem ab exponentibus fractis liberemus, ſtatuamus $x = z^\lambda$, et ob $\partial x = \lambda z^{\lambda-1}\partial z$, erit

$$\int x^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\partial x(1-x)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}} = \lambda\int z^{\mu-1}\partial z(1-z^\lambda)^{\frac{\nu-\lambda}{\lambda}},$$

quae

quae formula, ob $\nu - \lambda$, ita referri poteſt: $\lambda \int \frac{z^{\mu - 1} \partial z}{\sqrt[\lambda]{(1 - z^\lambda)^{\lambda - \nu}}}$, quod integrale pariter a $z = 0$ vsque ad $z = 1$ eſt extendendum. Facta igitur hac ſubſtitutione aequatio noſtra principalis ita ſe habebit:

$$\tfrac{\mu + \nu}{\mu \nu} \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\mu} \cdot \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\nu} = \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu + \nu}} \int \frac{z^{\mu - 1} \partial z}{\sqrt[\lambda]{(1 - z^\lambda)^{\lambda - \nu}}},$$

vbi ambo numeri $\mu$ et $\nu$ perpetuo nobis erunt poſitiui et minores quam $\lambda$. Imprimis autem hic obſeruari meretur, caſu quo $\mu + \nu = \lambda$ poſtremum integrale ſemper ad quadraturam circuli ita reduci poſſe, vt ſit

$$\int \frac{z^{\mu - 1} \partial z}{\sqrt[\lambda]{(1 - z^\lambda)^\mu}} = \frac{\pi}{\lambda \operatorname{ſin.} \frac{\mu \pi}{\lambda}}.$$

§. 7. Ex hac iam aequatione principali haud difficulter valores formulae integralis propoſitae pro ſingulis denominatoribus $\lambda$ elicientur, ſi modo litteris $\mu$ et $\nu$ quouis caſu omnes numeri denominatore $\lambda$ minores ſucceſſiue tribuantur, tum enim plures formabuntur aequationes, ex quibus valores formularum $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\mu}$ et $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^\nu}$ definiri poterunt. Quod autem ad formulam $\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu + \nu}}$ attinet, quae nata eſt ex $\int u^{m + n} \partial x$, quando fuerit $m + n > 1$, ſiue $\mu + \nu > \lambda$, quoniam vidimus eſſe $\int u^{m + n} \partial x = (m + n) \int u^{m + n - 1} \partial x$, erit

$$\int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu + \nu}} = \tfrac{\mu + \nu}{\lambda} \int \partial x \sqrt[\lambda]{u^{\mu + \nu - \lambda}},$$

quae ergo formula valebit, quando $\mu + \nu > \lambda$. Denique vero omnes valores, qui ex poſtrema formula integrali

$$\int \frac{z^{\mu+1}\,\partial z}{\sqrt[\alpha]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\nu}}}$$

naſcuntur, tanquam cogniti ſpectari poterunt, vnde eos litteris A, B, C, D, etc. indicabimus. His igitur praenotatis pro denominatore $\lambda$ ordine numeros 2, 3, 4, 5, etc. accipiamus, ideoque ſequentes caſus euoluamus, pro quibus in genere obſeruaſſe iuuabit, numeros $\mu$ et $\nu$ ſemper inter ſe permutari poſſe, ita vt ſit

$$\int \frac{z^{\mu-1}\,\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\nu}}} = \int \frac{z^{\nu-1}\,\partial z}{\sqrt[\lambda]{(1-z^{\lambda})^{\lambda-\mu}}}.$$

## I. Euolutio caſus, quo $\lambda = 2$.

§. 8. Pro hoc ergo caſu aequatio noſtra principalis erit

$$\tfrac{\mu+\nu}{\mu\nu} \int \partial x \sqrt{u^{\mu}} \,.\, \int \partial x \sqrt{u^{\nu}} = \int \partial x \sqrt{u^{\mu+\nu}} \int \frac{z^{\mu-1}\,\partial z}{\sqrt{(1-zz)^{2-\nu}}},$$

vbi cum loco $\mu$ et $\nu$ alios numeros praeter vnitatem accipere non liceat, poſito $\mu = 1$ et $\nu = 1$ pro formula poſtrema vnica ſpecies oritur $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, cuius valor, vti conſtat, eſt $= \frac{\pi}{2}$, quem autem ob analogiam ſequentium caſuum littera A deſignabimus. Hinc igitur cum ſit $\mu + \nu = 2$, erit

$$\int \partial x \sqrt{uu} = \int u\,\partial x = 1,$$

aequatio autem principalis induet hanc formam:

$$2 \int \partial x \sqrt{u} \,.\, \int \partial x \sqrt{u} = \tfrac{\pi}{2} = A,$$

vnde fit

$$\int \partial x \sqrt{u} = \sqrt{\tfrac{A}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 9. Quoniam igitur inuenimus eſſe $\int u^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ſi exponentem ipſius $u$ continuo vnitate augeamus, per reductionem

ctionem ſupra oſtenſam, $\int u^n \partial x = n \int u^{n-1} \partial x$, impetrabimus ſequentes valores:

$$\int u^{\frac{3}{2}} \partial x = \tfrac{1.3}{2.2} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{5}{2}} \partial x = \tfrac{1.3.5}{2.2.2} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{\frac{7}{2}} \partial x = \tfrac{1.3.5.7}{2.2.2.2} \sqrt{\pi},$$

et ita porro. Deinde vero regrediendo per alteram reductionem $\int u^n \partial x = \frac{1}{n+1} \int u^{n+1} \partial x$, reperiemus

$$\int u^{-\frac{1}{2}} \partial x = \sqrt{\pi}; \text{ hincque porro}$$

$$\int u^{-\frac{3}{2}} \partial x = -2 \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{5}{2}} \partial x = +\tfrac{2.2}{3} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{7}{2}} \partial x = -\tfrac{2.2.2}{3.5} \sqrt{\pi},$$

$$\int u^{-\frac{9}{2}} \partial x = \tfrac{2.2.2.2}{3.5.7} \sqrt{\pi},$$

ſicque valores noſtrae formulae inuenimus pro omnibus fractionibus, quarum denominator eſt $= 2$.

## Euolutio caſus, quo $\lambda = 3$.

§. 10. Quoniam hic litterae $\mu$ et $\nu$ binos valores recipere poſſunt, ſcilicet 1 et 2, formula integralis poſtrema quatuor nobis ſuppeditat valores, quos ſequenti modo indicemus:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)}} = A, \quad \int \frac{z \partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)}} = B,$$

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)^2}} = A', \quad \int \frac{z \partial z}{\sqrt[3]{(1 - z^3)^2}} = B'.$$

 In

In harum formularum prima et quarta eſt $\mu+\nu=\lambda=3$, vnde per quadraturam circuli habebimus

$$A=\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\,\frac{1}{3}\pi}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \text{ et } B'=\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\,\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vnde patet eſſe $B'=A$, quod etiam inde ſequitur, quod litterae $\mu$ et $\nu$ ſunt permutabiles. Praeterea vero notetur caſu $\mu+\nu=3$ fore

$$\int\partial x\sqrt[3]{u^{\mu+\nu}}=\int u\,\partial x=1,$$

at vero caſu $\mu+\nu=4$, erit

$$\int\partial x\sqrt[3]{u^4}=\int u^{\frac{4}{3}}\partial x=\tfrac{4}{3}\int\partial x\sqrt[3]{u}.$$

§. 11. His praemonitis omnes caſus aequationis noſtrae principalis ordine euoluamus ſequenti modo:

I. Si $\mu=1$ et $\nu=2$, erit $\frac{3}{2}\int\partial x\sqrt[3]{u}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=A$.

II. Si $\mu=2$ et $\nu=2$, erit $\frac{4}{4}\int\partial x\sqrt[3]{u^2}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=\frac{4}{3}B\int\partial x\sqrt[3]{u}$.

III. Si $\mu=1$ et $\nu=1$, erit $2\int\partial x\sqrt[3]{u}\,:\int\partial x\sqrt[3]{u}=A'\int\partial x\sqrt[3]{u^2}$.

IV. Si $\mu=2$ et $\nu=1$, erit $\frac{3}{2}\int\partial x\sqrt[3]{u^2}\,.\int\partial x\sqrt[3]{u}=B'$.

Sicque quatuor nacti ſumus aequationes pro determinandis binis valoribus incognitis, ſcilicet $\int\partial x\sqrt[3]{u}$ et $\int\partial x\sqrt[3]{u^2}$, quos ergo pluribus modis definire licebit, quandoquidem ad hoc duae tantum aequationes ſufficiunt.

§. 12. Quo autem hic calculus facilior reddatur, ſtatuamus breuitatis gratia $\int\partial x\sqrt[3]{u}=p$ et $\int\partial x\sqrt[3]{u^2}=q$, e combinemus primo aequationem I et II, quae erunt

$$\tfrac{3}{2}pq=A \text{ et } qq=\tfrac{4}{3}Bp,$$

quarum poſterior dat $p=\frac{3qq}{4B}$, qui valor in priore ſubſtitutus dat

dat $\frac{9 q^3}{8 B} = A$, vnde reperitur $q = 2 \sqrt[3]{\frac{AB}{9}}$, ex quo porro colligitur $p = \frac{3}{B} \sqrt[3]{\frac{A^2 B^2}{81}}$, ſiue etiam $p = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}}$, ſicque pro $p$ et $q$ reſtitutis valoribus iam nacti ſumus has determinationes:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{AB}{9}}.$$

§. 13. Combinemus nunc primam aequationem cum tertia, et habebimus $\frac{3}{2} p q = A$ et $2 p p = A' q$. Ex poſteriore fit $q = \frac{2 p p}{A'}$, qui valor in priore ſubſtitutus dat $\frac{3 p^3}{A'} = A$, vnde reperitur $p = \sqrt[3]{\frac{A A'}{3}}$, hincque

$$q = \frac{2}{A'} \sqrt[3]{\frac{A^2 A' A'}{9}} = 2 \sqrt[3]{\frac{A^2}{9 A'}},$$

ſicque haec combinatio nos perducit ad hos valores:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A A'}{3}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A^2}{9 A'}}.$$

§. 14. Combinemus nunc quoque primam aequationem cum quarta, et habebimus $\frac{3}{2} p q = A$ et $\frac{3}{2} p q = B'$, vnde nihil aliud ſequitur, niſi $B' = A$, vti ante inuenimus. Combinemus igitur ſecundam cum tertia, et habebimus $q q = \frac{4}{3} B p$ et $2 p p = A' q$, ex quarum poſteriore fit $q = \frac{2 p p}{A'}$, qui valor in prima ſubſtitutus dat $\frac{4 p^3}{A' A'} = \frac{4}{3} B$, vnde reperitur

$$p = \sqrt[3]{\frac{A' A' B}{3}}, \text{ ex quo fit}$$

$$q = 2 \sqrt[3]{\frac{A' B B}{9}},$$

ſicque haec combinatio nobis dat hos valores:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{A' A' B}{3}} \text{ et } \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{A' B B}{9}}.$$

§. 15. Quoniam aequatio quarta cum prima prorſus conuenit, ſuperfluum foret, ſecundam vel tertiam cum quarta combinare, quoniam eas iam cum prima combinauimus. Sicque pro litteris $p$ et $q$ omnino ternos nacti ſumus valores, quos ita coniunctim ob oculos ponamus:

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\frac{AA}{3B}} = \sqrt[3]{\frac{A'A}{3}} = \sqrt[3]{\frac{A'A'B}{3}} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt[3]{u^2} = 2\sqrt[3]{\frac{AB}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{A^2}{9A'}} = 2\sqrt[3]{\frac{A'BB}{9}}.$$

Hinc igitur ſumtis cubis ſequentes nanciſcimur aequationes:

$$\frac{AA}{B} = AA' = A'A'B \text{ et}$$

$$AB = \frac{AA}{A'} = A'BB.$$

§. 16. At relatione inter hos diuerſos valores facta omnes hae aequalitates ad vnicam hanc proprietatem reuocantur, qua eſt $A = A'B$. Subſtitutis igitur ipſis formulis integralibus conſequimur hanc veritatem maxime memorabilem:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} \cdot \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}},$$

et quia A per quadraturam circuli definitur, prodibit valor huius producti:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}} \cdot \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt[3]{(1-z^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vnde ſi alterius harum duarum formularum valor innoteſceret, ſimul alterius valor foret cognitus; hoc enim modo ex binis valoribus A et B bini reliqui A′ et B′ ita determinantur, vt ſit $A' = \frac{A}{B}$ et B′ et A. Denique etiam operae pretium erit notaſſe hanc relationem

$$\int \partial x \sqrt[3]{u} \cdot \int \partial x \sqrt[3]{u^2} = \tfrac{2}{3}A = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

§. 17.

## Euolutio caſus quo $\lambda = 4$.

§. 17. Hic iam primo breuitatis gratia ponamus

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^2} = q \text{ et } \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = r;$$

praeterea vero deſignemus formulam integralem $\int \frac{z^{\mu-1}\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^{4-\nu}}}$, per characterem $(\mu, \nu)$, quandoquidem iam vidimus litteras $\mu$ et $\nu$ inter ſe permutari poſſe. Deinde aequatio principalis hoc modo repraeſentetur:

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^\mu} . \int \partial x \sqrt[4]{u^\nu} = \frac{\mu\nu}{\mu+\nu} \int \partial x \sqrt[4]{u^{\mu+\nu}} (\mu, \nu);$$

vbi notetur ſi $\mu + \nu = \lambda = 4$, fore $\int \partial x \sqrt[4]{u^4} = 1$; ſin autem $\mu + \nu = \lambda + \alpha = 4 + \alpha$, erit

$$\int \partial x \sqrt[4]{u^{4+\alpha}} = (1 + \tfrac{\alpha}{4}) \int u^{\frac{\alpha}{4}} \partial x = \frac{\mu+\nu}{4} \int \partial x \sqrt[4]{u^\alpha}.$$

§. 18. Tribuamus nunc litteris $\mu$ et $\nu$ ſucceſſiue omnes valores minores quam 4, atque aequatio principalis nobis praebebit ſequentes aequationes:

1°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 1}$, erit $pp = \frac{1}{2} q (1, 1)$, vnde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1, 1) = A$.

2°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 2}$, erit $pq = \frac{2}{3} r (1, 2)$, vnde $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1, 2) = B$.

3°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 3}$, erit $pr = \frac{3}{4}(1, 3) = C$.

4°. Si $\binom{\mu = 2}{\nu = 2}$, erit $qq = (2, 2) = D$.

5°. Si $\binom{\mu = 2}{\nu = 3}$, erit $qr = \frac{6}{5} . \frac{5}{4} p (2, 3)$, vnde fit $\frac{qr}{p} = \frac{3}{2}(2, 3) = E$.

6°. Si $\binom{\mu = 3}{\nu = 3}$, erit $rr = \frac{9}{6} . \frac{6}{4} q (3, 3)$, vnde fit $\frac{rr}{q} = \frac{9}{4}(3, 3) = F$.

§. 19. Hinc igitur nacti ſumus ſex aequationes, ex quibus tres noſtras incognitas $p$, $q$ et $r$ definiri oportet, quod igitur pluribus modis fieri poteſt, ſiquidem ternae aequationes ſufficiunt. Eligamus igitur eas, quae negotium facillime conficiunt, ac primo quidem quarta nobis ſtatim dat $q = \sqrt{D}$, vnde ex prima elicimus $pp = A\sqrt{D}$, ideoque

$$p = \sqrt{A\sqrt{D}} = \sqrt[4]{AAD},$$

denique ex aequatione ſexta colligimus $rr = F\sqrt{D}$, ideoque $r = \sqrt[4]{FFD}$, ſicque omnes tres formulas tranſcendentes ita determinauimus, vt ſit

$$1^\circ.\ p = \int \partial x \sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{AAD} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(1,1)^2(2,2)},$$

$$2^\circ.\ q = \int \partial x \sqrt[4]{u^2} = \int \partial x \sqrt{u} = \sqrt{D} = \sqrt{(2,2)},$$

$$3^\circ.\ r = \int \partial x \sqrt[4]{u^3} = \sqrt[4]{DFF} = \tfrac{3}{2}\sqrt[4]{(2,2)(3,3)^2}.$$

20. Hic iam notaſſe iuuabit, valorem formulae $(\mu, \nu)$ caſu quo $\mu + \nu = \lambda$, in genere per quadraturam circuli exprimi poſſe, cum hoc caſu ſit

$$(\mu, \nu) = \frac{\mu}{\lambda \operatorname{ſin.} \frac{\mu \pi}{\lambda}}.$$

Noſtro igitur caſu, quo $\lambda = 4$, erit

$$(2, 2) = \frac{\pi}{4 \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{4},$$

deinde quoque erit

$$(1, 3) = \frac{\pi}{4 \operatorname{ſin.} \frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Hinc igitur patet fore $D = \frac{\pi}{4}$ et $C = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$, ita vt hae duae littere C et D a ſola quadratura circuli pendeant.

§. 21.

§. 21. Quoniam has tres determinationes, nempe:

$$p = \sqrt[4]{AAD},\ q = \sqrt{D} \text{ et } r = \sqrt[4]{DFF},$$

ex aequationibus 1, 4 et $6^{ta}$ elicuimus, ſi eosdem valores in reliquis aequationibus ſubſtituamus, reperiemus egregias relationes inter litteras noſtras maiuſculas. Sic enim ſecunda aequatio $pq = Br$ dabit $AAD^3 = B^4 DFF$, quae reducitur ad hanc: $AD = BBF$; tertia vero aequatio $pr = C$ dabit $ADF = CC$; denique quinta aequatio $qr = Ep$ praebebit $D^3 FF = A^2 DE$, vnde fit $DF = AEE$. Hoc ergo modo deducti ſumus ad tres ſequentes relationes:

$$1^\circ.\ AD = BBF,\ 2^\circ.\ ADF = CC \text{ et } 3^\circ.\ DF = AEE,$$

quarum prima ducta in ſecundam dabit $AD = BC$, at vero ſecunda ducta in tertiam producit $DF = CE$. Cum igitur ſit $AD = BC$, ex prima concluditur quoque fore $C = BF$, ita vt ternae determinationes repertae ad iſtas ternas reuocentur:

$$1^\circ.\ C = AE,\ 2^\circ.\ C = BF,\ 3^\circ.\ AD = BC,$$

quae reducuntur ad iſtas tres ſimpliciſſimas:

$$1^\circ.\ C = AE,\ 2^\circ.\ C = BF,\ 3^\circ.\ D = BE.$$

§. 22. Quodſi iam in his poſtremis aequationibus loco litterarum formulas integrales per noſtros characteres deſignatas introducamus, prouenient ſequentes relationes:

$$1^\circ.\ (1, 3) = (1, 1)(2, 3),$$

$$2^\circ.\ (1, 3) = 2(1, 2)(3, 3) \text{ et}$$

$$3^\circ.\ (2, 2) = (1, 2)(2, 3).$$

Hinc igitur per ipſas formulas integrales habebimus iſtas tres relationes maxime memorabiles:

$$1^\circ.\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} \cdot \int \frac{zz\,\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}},$$

2°. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt[4]{(1 - z^4)}}$ et

3°. $\frac{\pi}{4} = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - z^4)}} \cdot \int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1 - z^4)}}$,

quarum vltimam iam dudum in medium attuli.

§. 23. Cum igitur ex ſex formulis integralibus quae hic occurrunt, binae, ſcilicet C et D, a quadratura circuli pendeant, ſi modo ex reliquis vnius valor innoteſcat, valores caeterarum inde aſſignari poterunt. Si enim praeter characteres (1, 3) et (2, 2) inſuper hunc (1, 2) tanquam cognitum ſpectemus, reliqui tres per hos ſequenti modo determinabuntur:

$(3, 3) = \frac{(1, 3)}{2(1, 2)}$; $(2, 3) = \frac{(2, 2)}{(1, 2)}$; $(1, 1) = \frac{(1, 2)(1, 3)}{(2, 2)}$.

## Euolutio caſus quo $\lambda = 5$.

§. 24. Vocemus hic formulas tranſcendentes quaeſitas $\int u^{\frac{1}{5}} \partial x = p$, $\int u^{\frac{2}{5}} \partial x = q$, $\int u^{\frac{3}{5}} \partial x = r$, $\int u^{\frac{4}{5}} \partial x = s$. Nunc vero character $(\mu, \nu)$ ſignificet hanc formulam integralem: $\int \frac{z^{\mu - 1} \partial z}{\sqrt[5]{(1 - z^5)^{5 - \nu}}}$, quibus poſitis ex aequatione principali decem ſequentes aequationes nanciſcemur:

1°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 1}$, erit $pp = \frac{1}{2} q(1, 1)$, vnde fit $\frac{pp}{q} = \frac{1}{2}(1, 1) = A$.

2°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 2}$, erit $pq = \frac{2}{3} r(1, 2)$, ergo $\frac{pq}{r} = \frac{2}{3}(1, 2) = B$.

3°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 3}$, erit $pr = \frac{3}{4} s(1, 3)$, ergo $\frac{pr}{s} = \frac{3}{4}(1, 3) = C$.

4°. Si $\binom{\mu = 1}{\nu = 4}$, erit $ps = \frac{4}{5}(1, 4) = D$.

5°. Si $\binom{\mu = 2}{\nu = 2}$, erit $qq = s\ (2, 2)$, ergo $\frac{qq}{s} = \ (2, 2) = E$.

6°.

6°. Si $\binom{\mu = 2}{\nu = 3}$, erit $q\,r = \frac{6}{5}(2,\,3) = F$.

7°. Si $\binom{\mu = 2}{\nu = 4}$, erit $q\,s = \frac{8}{6} \cdot \frac{6}{5}\,p\,(2,\,4)$, ergo $\frac{q\,s}{p} = \frac{8}{5}(2,\,4) = G$.

8°. Si $\binom{\mu = 3}{\nu = 3}$, erit $r\,r = \frac{9}{6} \cdot \frac{6}{5}\,p\,(3,\,3)$, ergo $\frac{r\,r}{p} = \frac{9}{5}(3,\,3) = H$.

9°. Si $\binom{\mu = 3}{\nu = 4}$, erit $r\,s = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{5}\,q\,(3,\,4)$, ergo $\frac{r\,s}{q} = \frac{12}{5}(3,4) = I$.

10°. Si $\binom{\mu = 4}{\nu = 4}$, erit $s\,s = \frac{16}{8} \cdot \frac{8}{5}\,r\,(4,\,4)$, ergo $\frac{s\,s}{r} = \frac{16}{5}(4,\,4) = K$.

§. 25. Quoniam igitur decem adepti ſumus aequationes, ex quibus quatuor quantitates incognitas definiri oportet: eligamus eas, quibus negotium facillime expedietur. Quarta autem aequatio ſtatim dat $s = \frac{D}{p}$; ex ſexta autem fit $r = \frac{F}{q}$, ita vt tantum ſuperſit binas litteras $p$ et $q$ elicere. Deinde vero ex prima deducimus $q = \frac{p\,p}{A}$, ita vt ſit $r = \frac{A\,F}{p\,p}$. Nunc igitur ex ſecunda aequatione fiet $\frac{p^5}{A\,A\,F} = B$, vnde fit $p = \sqrt[5]{(AABF)}$, quo valore inuento colligitur fore $q = \sqrt[5]{\left(\frac{BBFF}{A}\right)}$, $r = \sqrt[5]{\left(\frac{A\,F^3}{B\,B}\right)}$, denique erit $s = \frac{D}{\sqrt[5]{(A\,A\,B\,E)}}$. Sicque omnes quatuor incognitas per quadraturas ordinarias exprimere licebit. Quodſi iam hos valores in reliquis aequationibus ſubſtituamus, orientur ſequentes aequationes: 1°. $C\,D = A\,F$, 2°. $B\,F = E\,D$, 3°. $D = A\,G$, 4°. $F = B\,H$, 5°. $D = B\,I$, 6°. $D\,D = A\,F\,K$, vnde ob $D = A\,G$ eruitur $D\,G = F\,K$.

§. 26. Ecce ergo ſex nouae prodierunt determinationes, quibus decem noſtrae litterae a ſe inuicem pendent, ita vt ex quatuor pro cognitis aſſumtis reliquae ſex definiri queant,

ant; pro cognitis autem imprimis aſſumi conueniet binas D et F, quippe quae per quadraturam circuli innoteſcunt, cum ſit

$$D = \tfrac{4}{5}(1, 4) = \tfrac{4}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \,\text{ſin.}\, \frac{1}{5}\pi} \text{ et } F = \tfrac{6}{5}(2, 3) = \tfrac{6}{5} \cdot \frac{\pi}{5 \,\text{ſin.}\, \frac{2}{5}\pi}.$$

Dummodo ergo duae reliquarum etiam vt cognitae ſpectentur, caeteras omnes per eas definire licebit. At vero ſex illae relationes rite inter ſe comparatae ternas formulas tam ipſi D quam ipſi F aequales ſuppeditant, quae ſunt $D = AG = BI = CK$ et $F = BH = CG = EI$. Hinc igitur, ſi praeter D et F etiam litterae A et B pro cognitis aſſumantur, reliquae litterae ex iis determinabuntur vt ſequitur: $C = \frac{AF}{D}$, $E = \frac{BF}{D}$, $G = \frac{D}{A}$, $H = \frac{F}{B}$, $I = \frac{D}{B}$ et $K = \frac{DD}{AF}$.

§. 27. Subſtituamus nunc loco harum litterarum characteres formularum integralium, atque ſex ſequentes relationes obtinebuntur:

1°. $(1, 4) = (1, 1)(2, 4)$,
2°. $(1, 4) = 2(1, 2)(3, 4)$,
3°. $(1, 4) = 3(1, 3)(4, 4)$,
4°. $(2, 3) = (1, 2)(3, 3)$,
5°. $(2, 3) = (1, 3)(2, 4)$,
6°. $(2, 3) = 2(2, 2)(3, 4)$;

vnde plura egregia theoremata formari poſſent.

§. 28. Quoniam ambae litterae D et F, ſeu potius characteres (1,4) et (2,3) ambo peripheriam circuli inuoluunt, eorum ratio, ſeu fractio $\frac{(1, 4)}{(2, 3)}$, algebraice exhiberi poterit, quippe cuius valor eſt $= \frac{\text{ſin.}\, \frac{2}{5}\pi}{\text{ſin.}\, \frac{1}{5}\pi} = 2 \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{5}\pi$. Hinc etiam ſequentes ratio-

nes

nes inter binas formulas integrales deriuantur:

$$2 \text{ coſ.} \tfrac{1}{5}\pi = \frac{(1,1)}{(1,3)} = 2\frac{(3,4)}{(3.3)} = \frac{(1,2)}{(2,2)} = 3\frac{(4,4)}{(2,4)},$$

vnde iterum eximia theoremata formari poſſent, ſi praeſens noſtrum inſtitutum hoc poſtularet. Pleniorem autem huius argumenti expoſitionem in aliam occaſionem ſum dilaturus.

§. 29. Simili modo quo hic caſum $\lambda = 5$ euoluimus, etiam tractare liceret ſequentes caſus, quibus litterae $\lambda$ maiores valores tribuuntur. Quoniam autem numerus aequationum continuo ſecundum numeros trigonales increſcit, ſuperfluum foret iſtum laborem hic ſuſcipere, quoniam omnes operationes analyticae, quibus hae ſolutiones nituntur, iam ſatis dilucide ſunt expoſitae.

PLE-

# PLENIOR EXPOSITIO SERIERVM ILLARVM MEMORABILIVM, QVAE EX VNCIIS POTESTATVM BINOMII FORMANTVR.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die 30 Sept. 1776.*

§. 1.

Ad ſummationem iſtarum progreſſionum imprimis me perduxit idonea ſignandi ratio, qua vſus ſum ad vncias cuiuscunque poteſtatis Binomii ſuccincte repraeſentandas. Scilicet poteſtatem indefinitam Binomii $(1+z)^n$ per ſequentem ſeriem exhibui:

$$(1+z)^n = 1 + (\tfrac{n}{1}) z + (\tfrac{n}{2}) zz + (\tfrac{n}{3}) z^3 + (\tfrac{n}{4}) z^4 + \text{etc.}$$

ita vt poteſtatis $z^p$ coëfficiens ſit $(\frac{n}{p})$, in quo charactere, ſub forma fractionis expreſſo, numerus ſuperior $n$ denotat ipſum exponentem poteſtatis, inferior vero $p$ indicat, quotus ſit iſte coëfficiens ab initio numeratus. Conſtat autem ex euolutione huius poteſtatis ſemper eſſe vt ſequitur:

$$(\tfrac{n}{0}) = 1,\ (\tfrac{n}{1}) = n,\ (\tfrac{n}{2}) = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2},\ (\tfrac{n}{3}) = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3},$$

et in genere

$$(\tfrac{n}{p}) = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \ldots \ldots \tfrac{n-p+1}{p},$$

deinde cum vltimus terminus Binomii euoluti ſit $z^n$, erit $(\frac{n}{n}) = 1$; et quia vnciae, ab vltimo termino regrediendo, eun-

dem

dem ordinem ſeruant atque ab initio, erit $(\frac{n}{n-1}) = (\frac{n}{1})$, $(\frac{n}{n-2}) = (\frac{n}{2})$, atque in genere $(\frac{n}{n-p}) = (\frac{n}{p})$. Caeterum quoque hinc manifeſtum eſt valorem huius characteris $(\frac{n}{p})$ ſemper in nihilum abire, quoties fuerit $p$ vel numerus negatiuus, vel poſitiuus maior quam $n$.

§. 2. His poſitis contemplatus ſum feriem, cuius ſinguli termini ſunt producta ex binis vnciis duarum quarumcunque poteſtatum Binomii, ordine inuicem iunctis, cuiusmodi in genere eſt haec progreſſio:

$$s = (\frac{m}{0})(\frac{n}{p}) + (\frac{m}{1})(\frac{n}{p+1}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{p+2}) + (\frac{m}{3})(\frac{n}{p+3}) + \text{etc.}$$

donec perueniatur ad terminos euaneſcentes, quemadmodum etiam termini, qui primum praecederent, euaneſcunt, atque oſtendi talis progreſſionis ſummam ſemper eſſe $s = (\frac{m+n}{m+p})$, vel etiam $s = (\frac{m+n}{n-p})$. Demonſtratio quidem huius veritatis ita comparata videtur, vt tantum pro exponentibus integris $m$ et $n$ valeat; veruntamen iam oſtendi, eandem ſummationem etiam pro exponentibus fractis locum habere, ſi modo valor characteris $(\frac{m+n}{m+p})$ per notas methodos interpolationum rite definiatur.

§. 3. Iſta autem interpolatio commodiſſime inſtituitur per formulas integrales logarithmicas. Notum enim eſt, ſi ponatur breuitatis gratia $l\frac{1}{x} = u$, atque integralia ſequentia perpetuo a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendantur, fore vt ſequitur: $\int u\,\partial x = 1$; $\int uu\,\partial x = 1.2$; $\int u^3\partial x = 1.2.3$; $\int u^4\partial x = 1.2.3.4$, atque in genere

$$\int u^p\,\partial x = 1.2.3.4.\ldots.p.$$

Praeterea vero erit $\int u^0\,\partial x = 1$. Sin autem exponens $p$ denotet numerum integrum negatiuum quemcunque, valor integralis $\int u^p\,\partial x$, ſemper erit infinitus. Cum enim in genere ſit

$$\int u^{p+1}\partial x = 1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,(p+1) = (p+1)\int u^p\partial x,$$

erit viciſſim

$$\int u^p\partial x = \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}\partial x.$$

Quare ſi ſumamus $p = -1$, prodit

$$\int\frac{\partial x}{u} = \frac{1}{0}\int u^0\partial x = \frac{1}{0} = \infty.$$

Deinde ſumto $p = -2$, habebitur:

$$\int\frac{\partial x}{u^2} = -\frac{1}{1}\int\frac{\partial x}{u} = -\frac{1.\,1}{0.\,1} = \infty.$$

Vnde patet etiam omnia ſequentia integralia euadere infinita. Quando autem $p$ denotat numerum fractum, talis euolutio non amplius locum habere poteſt, ſed contentos nos eſſe oportet ea quantitate tranſcendente, quae per formulam $\int u^p\partial x$ exprimitur. Ita iam dudum innotuit, ſi fuerit $p = -\frac{1}{2}$, tum eſſe $\int\frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}$, denotante $\pi$ peripheriam circuli cuius diameter eſt $= 1$. Hinc ergo per reductionem ante allatam erit $\int\partial x\sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ſimilique modo porro eſt

$$\int u^{\frac{3}{2}}\partial x = \frac{1.\,3}{2.\,2}\sqrt{\pi},$$ atque vlterius

$$\int u^{\frac{5}{2}}\partial x = \frac{1.\,3.\,5}{2.\,2.\,2}\sqrt{\pi}$$ et

$$\int u^{\frac{7}{2}}\partial x = \frac{1.\,3.\,5.\,7}{2.\,2.\,2.\,2}\sqrt{\pi},$$

etc.

Quando autem $p$ eiusmodi eſt fractio, cuius denominator eſt maior quam 2, tum valores huiusmodi formularum integralium reducuntur ad quadraturas magis tranſcendentes.

§. 4. His expoſitis ſummatio progreſſionis ſupra allatae per huiusmodi formulas integrales exhiberi poterit: facile enim perſpicitur fore

$$s = \left(\frac{m+n}{m+p}\right) = \frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x\,.\int u^{n-p}\partial x}.$$

Si enim $m$, $n$ et $p$ fuerint numeri integri poſitiui, erit vtique

$\int u^{m+n}$

$$\int u^{m+n} \partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ (m+n).$$

Simili modo erit

$$\int u^{m+p} \partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ (m+p);$$

$$\int u^{n-p} \partial x = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ (n-p);$$

vnde ſequitur fore

$$\frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^{m+p} \partial x} = (m+p+1)(m+p+2).\ \ldots\ (m+n);$$

vbi factorum numerus eſt $= n - p$, quippe qui, ordine retrogrado ſcripti, ſunt

$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2).\ \ldots\ldots\ (m+p+1).$$

Verum hoc productum ſi inſuper diuidatur per

$$\int u^{n-p} \partial x = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (n-p),$$

vbi factorum numerus pariter eſt $n - p$, reperietur fore

$$\frac{\int u^{m+n} \partial x}{\int u^{m+p} \partial x . \int u^{n-p} \partial x} = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \frac{m+n-3}{4} \cdots \frac{m+p+1}{n-p},$$

atque haec forma manifeſto eſt valor huius characteris $(\frac{m+n}{n-p})$, qui pariter ſummam quaeſitam $s$ indicat. Quamquam autem haec demonſtratio ad numeros integros reſtringi videtur, tamen per principium continuitatis iſta expreſſio, per formulas integrales exhibita, etiam veritati conformis manere debet, quicunque numeri fracti pro litteris $m$, $n$ et $p$ accipiantur.

§. 5. Huc fere redeunt, quae non ita pridem circa ſummationem huiusmodi progreſſionum ſum commentatus. Nunc autem mihi propoſitum eſt in easdem ſummas per methodum maxime diuerſam, cuius iam nonnulla dedi ſpecimina, inquirere; quo pacto non ſolum ſummatio hic tradita maxime confirmabitur et illuſtrabitur, ſed etiam pro caſibus exponentium fractorum eae curuae algebraicae reperientur, a quarum quadratura ſummationes pendent, cum ante iſtae ſummae per

 qua-

quadraturas curuarum tranſcendentium exprimerentur, ita vt iſta noua methodus maximam vtilitatem in Analyſin ſit illatura; ea autem nititur reductione formularum integralium ſatis quidem cognita, quam autem ad noſtrum vſum in ſequentibus Lemmatibus ſum accommodaturus.

## Lemma I.

§. 6. Si ponatur $V = x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$, erit

$$l V = a\, l x + \tfrac{c}{b}\, l (1 - x^b),$$

ac differentiando

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{a\, \partial x}{x} - \frac{c\, x^{b-1}\, \partial x}{1 - x^b},$$

hinc per V multiplicando, iterumque integrando, perueniemus ad hanc reductionem:

$$V = x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = a \int x^{a-1} \partial x\, (1 - x^b)^{c:b} - c \int x^{a+b-1} \partial x\, (1 - x^b)^{\frac{c-b}{b}},$$

hincque binas ſequentes reductiones deducimus:

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x\, (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{a}{1}\, x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x\, (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1} \partial x\, (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = -\tfrac{1}{c}\, x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{a}{c} \int x^{a-1} \partial x\, (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

## Corollarium.

§. 7. Quodſi haec integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendi debeant, atque omnes exponentes $a$, $b$ etc. fuerint poſitiui, tum in vtraque reductione membrum algebraicum penitus ex comparatione tollitur, quippe quod euaneſcit, facto tam $x = 0$ quam $x = 1$, atque binae reductiones inuentae ita ſe habebunt:

I.

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{a}{c}\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Sin autem exponentes $a$, $b$ et $c$ non fuerint poſitiui, in iſtis reductionibus membrum algebraicum ſeu abſolutum praetermitti nequit, quandoquidem id vel caſu $x=0$ vel caſu $x=1$ in infinitum excreſcit. Hic autem ſemper exponens $b$ tanquam poſitiuus ſpectari poterit.

## Lemma II.

§. 8. Poſito vt ante $V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}}$, ſi ambae fractiones, quas pro $\frac{\partial V}{V}$ inuenimus, ad communem denominatorem redigamus, habebimus $\frac{\partial V}{V} = \frac{a\partial x - (a+c)x^b\partial x}{x(1-x^b)}$.

Quodſi iam iterum per V multiplicemus et integremus, perveniemus ad hanc aequationem:

$$V = x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = a\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} - (a+c)\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

vnde ſequuntur hae duae aequationes:

$$\text{I. } \int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \left(\tfrac{a+c}{a}\right)\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{-1}{a+c}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{a}{a+c}\cdot\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

 (Corol-

## Corollarium.

§. 9. Quodſi haec integralia, quemadmodum in ſequentibus perpetuo aſſumemus, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendi debeant, atque exponentes $a$ etc. fuerint poſitiui, membra abſoluta praetermittere licebit, ita vt tum ſequentes reductiones locum ſint habiturae:

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \tfrac{a+c}{a} \int x^{a+b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a+b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \tfrac{a}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

## Lemma III.

§. 10. Poſito denuo $V = x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$, quoniam ſupra inuenimus $\frac{\partial V}{V} = \frac{a \partial x - (a+c) x^b \partial x}{x (1 - x^b)}$, ſi hic loco prioris membri $a \partial x$ ſcribamus $(a + c) \partial x - c \partial x$, fiet

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{\partial x (a + c)}{x} - \frac{c \partial x}{x (1 - x^b)},$$

quae aequatio per V multiplicata et integrata praebet:

$$V = x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = (a + c) \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$- c \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1},$$

vnde ſequentes duae reductiones obtinentur:

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{1}{a+c} x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+ \tfrac{c}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = - \tfrac{1}{c} x^a (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}$$
$$+ \tfrac{a+c}{c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

Corol-

## Corollarium.

§. 11. Quodſi igitur exponentes $a$ etc. fuerint poſitiui, et integralia extendi debeant ab $x = 0$ ad $x = 1$, omiſſo membro abſoluto hae reductiones naſcentur:

$$\text{I. } \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} \text{ et}$$

$$\text{II. } \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \frac{a+c}{c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b}}.$$

## Problema 1.

*Si, integratione ab $x = 0$ vſque ad $x = 1$ extenſa, exponentes $a$ et $c$ fuerint poſitiui, cognitusque fuerit valor formulae integralis $\int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \Delta$, per eundem exprimere omnes formulas integrales in hac forma generali contentas:*

$$\int x^{a+ib-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

## Solutio.

§. 12. Hic vtendum erit reductione poſteriore Lemmatis ſecundi, in Corollario tradita, quae eſt

$$\int x^{a+b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \frac{a}{a+c} \int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1},$$

vbi continuo exponentem $a$ numero $b$ augeamus; et cum per hypotheſin ſit

$$\int x^{a-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \Delta,$$

reductiones reperiuntur ſequentes:

$$\text{I. } \int x^{a+b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \frac{a}{a+c} \cdot \Delta.$$

$$\text{II. } \int x^{a+2b-1} \partial x (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \Delta.$$

III.

$$\text{III.} \int x^{a+3b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdot\Delta.$$

$$\text{IV.} \int x^{a+4b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdot\frac{a+3b}{a+3b+c}\cdot\Delta.$$

etc. etc.

cuius progreſſionis lex manifeſto in oculos incurrit.

## Corollarium 1.

§. 13. Quodſi fuerit $a+c=b$, ideoque $c=b-a$, erit $\Delta=\int\frac{x^{a-1}\partial x}{(1-x^b)^{\frac{a}{b}}}$; vbi quidem tenendum eſt, non ſolum exponentem $a$ debere eſſe poſitiuum, ſed etiam minorem quam $b$, quia etiam $c$ debet eſſe poſitiuum. Haec autem formula commode ad quadraturam circuli reuocari poteſt, ad quod oſtendendum ponatur $\frac{x}{\sqrt[b]{(1-x^b)}}=y$, vt poſito $x=0$ fiat etiam $y=0$, at facto $x=1$ euadet $y=\infty$; tum autem erit $\Delta=\int\frac{y^a\,\partial x}{x}$, ſumtisque poteſtatibus exponentis $b$, erit $y^b=\frac{x^b}{1-x^b}$, vnde reperitur $x^b=\frac{y^b}{1+y^b}$, hincque ſumendis logarithmis erit $b\,l\,x=b\,l\,y-l(1+y^b)$, vnde differentiando colligitur:

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y}-\frac{y^{b-1}\partial y}{1+y^b}=\frac{\partial y}{y(1+y^b)},$$

quo valore ſubſtituto erit $\Delta=\int\frac{y^{a-1}\partial y}{1+y^b}$, quod integrale cum ab $y=0$ vsque ad $y=\infty$ extendi debeat, alia occaſione oſtendi eius valorem eſſe $=\frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$.

Corol-

## Corollarium 2.

§. 14. Quamobrem ſi in genere ſtatuamus $c = b - a$, ita vt ſit $\Delta = \frac{\pi}{b \text{ ſin. } \frac{a\pi}{b}}$, ſingulae reductiones in problemate inventae ita ſe habebunt.:

$$\text{I. } \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \Delta.$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{a+2b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \Delta.$$

$$\text{III. } \int \frac{x^{a+3b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \Delta.$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^{a+4b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(x - x^b)^a}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot \frac{a+3b}{4b} \cdot \Delta.$$

etc. etc.

vbi euidens eſt coëfficientes ipſius $\Delta$ prorſus conuenire cum vnciis poteſtatis binomialis $(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}}$, quippe quae per euolutionem praebet

$$1 + \frac{a}{b} x^b + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot x^{2b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b} \cdot x^{3b} + \text{etc.}$$

## Problema 2.

§. 15. *Quodſi ponamus breuitatis gratia*

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{etc.}$$

*ita vt ſit*

$$A = \frac{a}{b},\ B = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b},\ C = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{2b} \cdot \frac{a+2b}{3b}, \text{ etc.}$$

*inueſtigare ſummam huius ſeriei*:

$$S = 1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}$$

## Solutio.

Cum igitur ſit

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A\,x^b + B\,x^{2b} + C\,x^{3b} + \text{etc.}$$

multiplicemus vtrinque per $\frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, atque integrando habebimus:

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}} = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + A\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$
$$+ B\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + C\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} + \text{etc.}$$

Omnes autem has formulas integrales per quantitatem $\Delta$ exprimere docuimus, qui valores ſi ſubſtituantur, perueniemus ad ſequentem ſeriem:

$$\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}} = \Delta + A.\tfrac{a}{b}\,\Delta + B.\tfrac{a}{b}.\tfrac{a+b}{2b}.\Delta$$
$$+ C.\tfrac{a}{b}.\tfrac{a+b}{2b}.\tfrac{a+2b}{3b}.\Delta \text{ etc.}$$

quae ſeries manifeſto reducitur ad hanc:

$$\Delta\,(1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.})$$

vnde ſeriei noſtrae propoſitae ſumma quaeſita erit

$$S = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{2a}}},$$

exiſtente $\Delta = \frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$.

Corol-

## Corollarium 1.

§. 16. Conſideremus hic primo caſum quo $b = 2$, et quia capi debet $a < b$, ſit $a = 1$, vnde ſit $\Delta = \frac{\pi}{2}$; tum vero pro ſerie ipſa habebimus $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$, $D = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$, etc. atque ſeriei

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + \text{etc.}$$

ſumma erit $S = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial x}{(1 - xx)}$. Eſt vero $\int \frac{\partial x}{1 - xx} = \frac{1}{2} l \frac{1 + x}{1 - x}$, qui valor, poſito $x = 1$, abit in infinitum. Eſt vero vtique ſumma huius ſeriei:

$$1 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 + (\tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 + (\tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8})^2 + \text{etc.}$$

infinite magna, quemadmodum alia occaſione oſtendi.

## Corollarium 2.

§. 17. Conſideremus quoque caſum $b = 3$, ſumamusque $a = 1$, vt exponens $\frac{2a}{b} = \frac{2}{3}$ etiamnunc ſit vnitate minor. Hoc igitur caſu pro ipſa ſerie habebimus: $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6}$, $C = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9}$, $D = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12}$, $E = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{13}{15}$, etc. atque ob $\Delta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, ſumma ſeriei $1 + A^2 + B^2 + C^2 +$ etc. erit $S = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}}$, quam ergo nunc exprimere licet per quadraturam curuae algebraicae, cuius abſciſſae $x$ reſpondet applicata $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}}$, pro quo caſu methodus primum tradita praebet quadraturam curuae tranſcendentis.

## Scholion.

§. 18. Haec expreſſio pro ſumma ſeriei

$$1 + A^2 + B^2 + C^2 + \text{etc.}$$

locum habere nequit, niſi exponens $a$ fuerit poſitiuus, quo

 ergo

ergo caſu Binomii $1 - x^b$ poteſtas eſt negatiua, ideoque ſeries $1 + A^2 + B^2 + C^2 +$ etc. in infinitum excurrit. Hinc ergo pro vnciis Binomii ad dignitatem poſitiuam eleuati nihil concludi poteſt, cum tamen hic caſus priore methodo ſponte ſe obtulerit. Deinde cum ſumma huius ſeriei inuenta ſit

$$S = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^{2a}}}, \text{ exiſtente}$$

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1 - x^b)^a}};$$

euidens eſt, ſi eſſet $a = b$, quo caſu foret $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, etc. tum ſummam ſeriei quadratorum manifeſto fore infinitam, id quod multo magis eueniret, ſi eſſet $a > b$. Quin etiam, ſi foret $2a = b$, ſiue $a = \frac{1}{2} b$ in Corollario primo vidimus etiam hanc ſummam eſſe infinitam. Quamobrem ſummatio hic inuenta reſtringitur ad hos arctos limites 1°. $a > 0$ et 2°. $a < \frac{1}{2} b$. Quemadmodum autem hinc etiam ſummae definiri queant, quando $a$ eſt numerus negatiuus, deinceps videbimus.

## Problema 3.

§. 19. *Si maneat, vt ante*

$$(1 - x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + \text{ etc.}$$

*atque inſuper ponatur:*

$$(1 - x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \text{ etc.}$$

*ita vt ſit*

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{b}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\alpha + b}{2b} \cdot \frac{\alpha + 2b}{3b}, \text{ etc.}$$

*inuenire ſummam ſeriei ex his binis vnciarum ſeriebus compoſitae:*

$$S = 1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \mathfrak{D} D + \text{ etc.}$$

Solu-

## Solutio.

Poſito vt in antecedente Problemate

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta,$$

ita vt ſit $\Delta = \frac{\pi}{b \text{ ſin. } \frac{a\pi}{b}}$, ſi quidem fuerit $a > 0$, reductiones ibi adhibitae dabunt:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = B\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = C\Delta,$$

$$\int \frac{x^{a+4b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = D\Delta,$$

etc. . . . etc.

Cum igitur ſit

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \text{etc.}$$

ſi vtrinque multiplicemus per $\frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$ et integremus a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$, perueniemus ad ſequentem ſeriem:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \Delta + \mathfrak{A}A\Delta + \mathfrak{B}B\Delta + \mathfrak{C}C\Delta + \text{etc.}$$

 quae

quae eſt ipſa ſeries quaeſita per $\Delta$ multiplicata, ideoque eius ſumma $= \Delta S$. Hinc ergo viciſſim concludimus fore

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.} = \frac{1}{\Delta}\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Haec autem ſummatio pariter locum habere nequit, niſi ſit $a > 0$. At vero circa exponentem $\alpha$ hic nobis nihil praeſcribitur; vnde pro eo tam numeros poſitiuos quam negatiuos accipere licebit. Id tantum hic obſeruandum occurrit: niſi fuerit $a + \alpha < b$, ſummam ſeriei propoſitae ſemper eſſe infinite magnam.

## Corollarium 1.

§. 20. Quoniam $a$ contineri debet intra limites $0$ et $b$, ſumamus $b = 2$, capique oportet $a = 1$, vnde fit $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$, $C = \frac{1.3.5}{2.4.6}$, $D = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$, etc. praeterea vero habebimus:

$$\Delta = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Hinc igitur, quicunque valor ipſi $\alpha$ tribuatur, ſeriei quaeſitae

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \tfrac{1.3}{2.4}\mathfrak{B} + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

ſumma erit

$$S = \frac{2}{\pi}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^{1+\alpha}}}.$$

Vnde patet, dummodo fuerit $1 + \alpha < 2$, ideoque $\alpha < 1$, ſummam ſemper fore finitam.

## Corollarium 2.

§. 21. Manente igitur $a = 1$ et $b = 2$, quia debet eſſe $\alpha < 1$, quosdam caſus euoluamus.

I.

I. Sit $\alpha = 0$.

Hinc fiet $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, etc. ſicque ſeries ſummanda erit $S = 1$, noſtra autem formula praebet $S = \frac{2}{\pi}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Eſt vero pro terminis ſummationis praeſcriptis $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$, vnde fit $S = 1$, id quod egregie conuenit.

II. Sit $\alpha = -1$.

Hoc caſu fiet $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = -\frac{1.1}{2.4}$, $\mathfrak{C} = -\frac{1.1.3}{2.4.6}$, etc. vnde ſeries ſummanda erit

$$S = 1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} - \text{etc.}$$

At vero noſtra formula praebet

$$S = \frac{2}{\pi}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^0}} = \frac{2}{\pi},$$

quae ſumma egregie conuenit cum ea, quam ex formulis integralibus logarithmicis eruimus.

III. Sit $\alpha = -2$.

Fiet hic $\mathfrak{A} = -1$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, etc. Series ergo ſummanda erit $S = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; formula vero noſtra integralis praebet $S = \frac{2}{\pi}\int\partial x\sqrt{(1 - xx)}$. Iam vero ex Corollario Lemmatis tertii habemus hanc reductionem:

$$\int x^{a-1}\partial x(1 - x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c}\int x^{a-1}\partial x(1 - x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

quae, ad noſtrum caſum accommodata, ponendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, dat

$$\int\partial x\sqrt{(1 - xx)} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

hinc ergo fit $S = \frac{1}{2}$.

IV. Sit $\alpha = -3$.

Hoc ergo caſu fiet

$\mathfrak{A} = -\frac{3}{2}$, $\mathfrak{B} = +\frac{3.1}{2.4}$, $\mathfrak{C} = \frac{3.1.1}{2.4.6}$, $\mathfrak{D} = \frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}$, $\mathfrak{E} = \frac{3.1.1.3.5}{2.4.6.8.10}$, etc.

vnde

vnde ſeries ſummanda erit

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + \tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\tfrac{3\cdot1}{2\cdot4} + \tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\tfrac{3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6} + \tfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\tfrac{3\cdot1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \text{etc.}$$

at vero formula noſtra integralis praebet:

$$S = \tfrac{2}{\pi}\int\partial x\,(1 - xx).$$

Eſt vero pro terminis ſummationis ſtabilitis $\int\partial x(1-xx) = \tfrac{2}{3}$, quamobrem ſumma quaeſita erit $S = \tfrac{4}{3\pi}$.

V. Sit $\alpha = -4$.

Hoc ergo caſu fiet

$$\mathfrak{A} = -2,\ \mathfrak{B} = 1,\ \mathfrak{C} = 0,\ \mathfrak{D} = 0,\ \text{etc.}$$

vnde ſeries ſummanda erit

$$S = 1 - 1 + \tfrac{1\cdot3}{2\cdot4} = \tfrac{1\cdot3}{2\cdot4} = \tfrac{3}{8},$$

at vero formula integralis praebet:

$$S = \tfrac{2}{\pi}\int\partial x\,\sqrt{(1 - xx)^3} = \tfrac{2}{\pi}\int\partial x\,(1 - xx)^{\frac{3}{2}}.$$

Nunc vero per reductionem caſu III. adhibitam, ſumto $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, habebimus

$$\int\partial x\,(1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{4}\int\partial x\,\sqrt{(1 - xx)}.$$

Vidimus autem eſſe $\int\partial x\,\sqrt{(1 - xx)} = \tfrac{\pi}{4}$, vnde erit

$$\int\partial x\,(1 - xx)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3\pi}{16},$$

ex quo colligitur ſumma quaeſita $S = \tfrac{3}{8}$, id quod egregie convenit.

## Problema 4.

§. 22. *Retentis litteris tam Latinis A, B, C, D, etc. quam Germanicis* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, *etc. et iisdem valoribus, quos ipſis in praecedente problemate aſſignauimus, inueſtigare ſummas ſequentium ſerierum ex illis compoſitarum:*

$S' =$

$$S' = A + \mathfrak{A} B + \mathfrak{B} C + \mathfrak{C} D + \mathfrak{D} E + \text{etc.}$$
$$S'' = B + \mathfrak{A} C + \mathfrak{B} D + \mathfrak{C} E + \mathfrak{D} F + \text{etc.}$$
$$S''' = C + \mathfrak{A} D + \mathfrak{B} E + \mathfrak{C} F + \mathfrak{D} G + \text{etc.}$$
etc. etc.

## Solutio.

Poſito iterum $\Delta = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, in praecedente problemate vidimus eſſe

$$\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = A\,\Delta,$$
$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = B\,\Delta,$$
$$\int \frac{x^{a+3b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = C\,\Delta.$$
etc. etc.

Cum iam poſuerimus

$$(1-x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}\,x^b + \mathfrak{B}\,x^{2b} + \mathfrak{C}\,x^{3b} + \text{etc.}$$

multiplicemus vtrinque ſtatim per $\frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, et integrando nanciſcemur ſequentem formam:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = A\Delta + \mathfrak{A}B\Delta + \mathfrak{B}C\Delta + \mathfrak{C}D\Delta + \mathfrak{D}E\Delta + \text{etc.}$$

quae ſeries manifeſto eſt $= \Delta\,S'$. Hinc ergo concludimus fore

$$S' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}},$$

vbi, vt hactenus, eſt

$$\Delta = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}.$$

Pro ſecunda ſerie inuenienda multiplicetur forma illa:

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A}\,x^b + \mathfrak{B}\,x^{2b} + \mathfrak{C}\,x^{3b} + \text{etc.}$$

per formulam $\frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$, et ſingulis terminis integratis deducemur ad ſequentem formam:

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = B\Delta + \mathfrak{A}C\Delta + \mathfrak{B}D\Delta + \mathfrak{C}E\Delta + \mathfrak{D}F\Delta + \text{etc.}$$

quae eſt ſecunda ſeries propoſita in $\Delta$ ducta, ideoque $\Delta S''$, vnde concludimus fore

$$S'' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Ex his iam ſatis perſpicitur, quomodo omnium ſequentium ſerierum propoſitarum ſummae aſſignari queant: reperitur enim vt ſequitur:

$$S''' = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

$$S^{IV} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

$$S^{V} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+5b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}};$$

etc.

hinc

hincque porro in genere concluditur fore

$$S^{(n)} = \frac{1}{\Delta} \int \frac{x^{a+nb-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}}.$$

Verum hic adhuc conditio ſupra praeſcripta locum habet, qua valor exponentis $a$ inter limites $o$ et $b$ contineri debet. Deinde vero circa exponentem $\alpha$ pariter notari oportet, has ſummas finitas eſſe non poſſe, niſi ſit $\alpha + a < b$. Quamobrem nunc diſpiciamus, quemadmodum has ſummationes etiam ad alios valores exponentis $a$ accommodari conveniat.

## Problema 5.

§. 23. *Si exponens* a *fuerit numerus negatiuus, minor tamen quam* $b$, *ita vt ſit* $a + b > o$, *inuenire ſummam ſeriei*

$$S = 1 + \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \mathfrak{D} D + \text{etc.}$$

*vbi litterae maiuſculae eosdem habeant valores vt hactenus, ſcilicet :*

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + A x^b + B x^{2b} + C x^{3b} + D x^{4b} + \text{etc.}$$

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} = 1 + \mathfrak{A} x^b + \mathfrak{B} x^{2b} + \mathfrak{C} x^{3b} + \mathfrak{D} x^{4b} + \text{etc.}$$

## Solutio.

Cum exponens $a + b$ ſit poſitiuus, reductiones ſupra §. 12. exhibitas a ſecunda inchoemus, ac iam ponamus : $\int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \Delta'$, vnde reductiones ſupra exhibitae reuocabuntur ad ſequentes :

$$\int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\Delta' = \frac{b}{a}B\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+3b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\Delta' = \frac{b}{a}C\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+4b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\cdot\frac{a+3b}{4b}\Delta' = \frac{b}{a}D\Delta',$$

$$\int \frac{x^{a+5b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \frac{a+b}{2b}\cdot\frac{a+2b}{3b}\cdot\frac{a+3b}{4b}\cdot\frac{a+4b}{5b}\Delta' = \frac{b}{a}E\Delta'.$$

etc. etc.

His praenotatis conſideremus hanc aequationem:

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{b}} - 1 = \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \mathfrak{D}x^{4b} + \text{etc.}$$

quam per $\frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$ multiplicemus et integremus, atque obtinebimus ſequentem aequationem:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} - \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}}$$
$$= \mathfrak{A}\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{B}B\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{C}C\Delta' + \frac{b}{a}\mathfrak{D}D\Delta' + \text{etc.}$$

vbi loco primi termini $\mathfrak{A}\Delta'$ ſcribamus $\frac{b}{a}\mathfrak{A}A\Delta'$, vt ſeries ad hanc formam redigatur:

$$\frac{b}{a}\Delta'(\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \mathfrak{D}D + \text{etc.}) = \frac{b}{a}\Delta'(S-1).$$

Quo-

Quoniam autem exponens $a$ ſupponitur negatiuus, vnde ambae formulae integrales euaderent infinitae, vtamur reductione in Lemmate I. tradita:

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{c}{b}} + \tfrac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1},$$

et facta applicatione ad priorem formulam integralem, ſumendo $c = -a - \alpha$, erit

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}}$$
$$-\tfrac{(a+\alpha)}{a}\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{-a-\alpha-b}{b}}.$$

Pro altera autem formula noſtra integrali ſumi debet $c = -a$, fietque

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a}{b}}\int x^{a+b-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}}.$$

Cum iam exponens $a+b$ ſit poſitiuus, per reductionem in Corollario Lemmatis III. quae erat

$$\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1} = \tfrac{a+c}{c}\int x^{a-1}\partial x\,(1-x^b)^{\frac{c}{b}},$$

pro caſu poſterioris formulae habebimus

$$\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a-b}{b}} = -\tfrac{b}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} = -\tfrac{b}{a}\Delta',$$

ſicque formula noſtra integralis poſterior ita exprimetur, vt ſit

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^a}} = \tfrac{1}{a}x^a(1-x^b)^{\frac{-a}{b}} + \tfrac{b}{a}\Delta',$$

qui valor a priore formula integrali ſubtractus relinquit pro parte ſiniſtra hanc expreſſionem:

 $\frac{a}{1}x^a$

$$\tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a-\alpha}{b}} - \tfrac{(a+\alpha)}{b} \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}};$$

$$- \tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}} - \tfrac{b}{a} \Delta'.$$

Hic quidem, quoniam $a$ ſupponitur negatiuum, vtrumque membrum abſolutum, poſito $x = 0$, abit in infinitum; at bina coniunctim ita repraeſententur:

$$\tfrac{1}{a} x^a (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}} [(1 - x^b)^{\frac{-\alpha}{b}} - 1],$$

quae forma, ſumto $x$ infinite paruo, ob $(1-x^b)^{\frac{\alpha}{b}} = 1 + \frac{\alpha}{b} x^b$, etc. transmutatur in hanc: $\frac{\alpha}{ab} x^{a+b} (1 - x^b)^{\frac{-a}{b}}$, quae ob $a + b > 0$, facto $x = 0$, vtique euaneſcit, prouti conditio integrationis poſtulat. Poſito autem $x = 1$ quoque totum membrum abſolutum euaneſcit; quamobrem pro membro dextro noſtrae aequationis habebimus:

$$- \tfrac{b}{a} \Delta' - (\tfrac{a+\alpha}{a}) \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}},$$

cui ſi membrum ſiniſtrum $\frac{b}{a} \Delta' (S - 1)$ aequale ponatur, impetrabimus iſtum valorem:

$$S = - \frac{(a+\alpha)}{b\,\Delta'} \int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}},$$

quae expreſſio iam pro omnibus caſibus valet, quibus $a + b$ eſt numerus poſitiuus.

## Corollarium I.

§. 24. Quoniam in paragrapho praecedente inuenimus:

$$\int \frac{x^{a+b-1}\, \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = - \frac{b}{a} \Delta',$$

notum

notum eſt iſtius formulae integralis valorem, ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſum, reduci ad hanc formam: $\frac{\pi}{b \text{ ſin. } \frac{(a+b)}{b} \pi}$, vnde innoteſcit quantitas charactere $\Delta'$ contenta, quippe quae erit $\Delta' = \frac{-\pi a}{b b \text{ ſin. } \frac{(a+b)}{b} \pi}$, qui valor ita reducitur:

$$\Delta' = \frac{\pi a}{b b \text{ ſin. } \frac{a \pi}{b}}$$

## Corollarium 2.

§. 25. Reſtituamus autem loco $\Delta'$ ipſam formulam integralem, vnde prodiit, atque ſumma inuenta S hoc modo per binas formulas integrales exprimetur:

$$S = -\frac{(a+\alpha)}{b} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{\alpha}}},$$

quae etiam hoc modo exprimi poteſt:

$$S = \frac{(a+\alpha)}{a} \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} : \int \frac{x^{a+b-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}},$$

quae expreſſio ergo valet, quando $a + b > 0$, etiamſi forte $a$ ſit negatiuum; at vero pro caſibus, quibus exponens $a$ ipſe eſt negatiuus, pro eadem ſerie inuenimus ſummam

$$S = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1} \partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a}}}.$$

## Corollarium 3.

§. 26. Quodſi has binas formas accuratius perpendamus, mox deprehendemus, formam hic inuentam ex praecedente

dente facile deriuari poſſe ope reductionis prioris in Corollario Lemmatis primi monſtratae, vbi erat

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a}\int x^{a+b-1}\partial x(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}.$$

Quodſi enim hanc reductionem applicemus ad formam ſupra pro S inuentam, pro numeratore erit $c = -a-\alpha$, vnde ipſe numerator hoc modo transmutatur:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} = -\frac{(a+\alpha)}{a}\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}}.$$

Deinde vero pro denominatore erit $c = -a$, ideoque ipſe denominator:

$$\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a}}} = -\int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}};$$

vbi euidens eſt, ſi numerator per denominatorem diuidatur, eum ipſum valorem reſultare, quem hoc problemate ſumus nacti.

## Scholion.

§. 27. Quamquam igitur expreſſio ſupra inuenta pro ſummatione ſeriei:

$$S = 1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.}$$

quae ita ſe habet:

$$S = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a}}},$$

tantum valet pro caſibus quibus $a > 0$, tamen ex ea facile immediate deduci potuiſſet expreſſio pro S hic inuenta, quae etiam valet, dummodo fuerit $a + b > 0$, quam hic non ſine longis ambagibus ſumus adepti; at vero ratio hic difficulter perſpicitur, ob quam tali reductione vti liceat, quandoquidem reduc-

reductio §. 7. tradita ſubſiſtere nequit, niſi exponens $a$ fuerit poſitiuus, propterea quod pars abſoluta eſt neglecta, vnde vtique reductio tam numeratoris quam denominatoris ſeorſim ſpectata foret erronea; verum ambo errores, tam in numeratore quam in denominatore commiſſi, feliciter ſe mutuo compenſant. Quamobrem hac noua methodo tuto vti poterimus, quando exponenti $a$ adhuc maiores valores negatiui tribuuntur.

## Problema 6.

§. 28. *Retineant litterae maiuſculae, tam Latinae quam Germanicae, eosdem valores, quos ipſis hactenus aſſignauimus, definire ſummam ſeriei:*

$$S = 1 + \mathfrak{A}\,A + \mathfrak{B}\,B + \mathfrak{C}\,C + \mathfrak{D}\,D + \text{etc.}$$

*quando exponens* a *valores negatiuos quantumuis magnos accipit.*

## Solutio.

Pro caſibus, quibus exponens $a$ eſt poſitiuus, ſumma iſtius ſeriei ita exprimitur, vt ſit

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha}}} : \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a}}}.$$

Deinde vero pro valoribus negatiuis ipſius $a$, ſi modo fuerit $a+b>0$, per reductionem §. 7. modo inuenimus:

$$S = \left(\frac{a+\alpha}{a}\right)\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+\beta}}} : \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}}.$$

Sin autem demum formula $a+2b$ fiat poſitiua, reductionem expoſitam ad formam proxime praecedentem applicemus, ſumique debebit $a = a+b$ et $c = -a-\alpha-b$, pro numeratore; at vero pro denominatore $c = -a-b$; vnde reperitur

$$\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+b}}} = -\frac{(a+\alpha+b)}{a+b}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}} \text{ et}$$

$$\int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+b}}} = -\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}},$$

quibus valoribus in poſtrema expreſſione pro S ſubſtitutis, pro caſu $a+2b>0$, reperiemus

$$S = \frac{a+\alpha}{a}\cdot\frac{a+\alpha+b}{a+b}\int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+2b}}} : \int \frac{x^{a+2b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+2b}}}.$$

Sin autem $a+3b$ poſitiuum obtineat valorem, ſimilis reductio perducet ad ſequentem expreſſionem:

$$S = \frac{a+\alpha}{a}\cdot\frac{a+\alpha+b}{a+b}\cdot\frac{a+\alpha+2b}{a+2b}\int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+3b}}} : \int \frac{x^{a+3b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+3b}}}.$$

Similique modo ſi demum formula $a+4b$ ad poſitiuum valorem aſſurgat, ſumma quaeſita reperietur

$$S = \frac{a+\alpha}{a}\cdot\frac{a+\alpha+b}{a+b}\cdot\frac{a+\alpha+2b}{a+2b}\cdot\frac{a+\alpha+3b}{a+3b}\int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+\alpha+4b}}} : \int \frac{x^{a+4b-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x^b)^{a+4b}}}.$$

In omnibus his formulis denominatores ad arcum circularem ſe reduci patiuntur. Cum enim forma generalis denominatorum ſit $\int \frac{x^{a+nb-1}\,\partial x}{\sqrt[b]{(1-x)^{a+nb}}}$, per ea quae ſupra ſunt oſtenſa patet eius valorem eſſe $\frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,(\frac{a+nb}{b})\pi}$; vbi cum ſit $\text{ſin.}\,(\frac{a+nb}{b})\,\pi = \text{ſin.}\,(n\pi + \frac{a}{b}\pi)$, euidens eſt caſibus, quibus $n$ eſt numerus par, fore denominatorem $= \frac{\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$; caſibus autem, quibus $n$ eſt numerus impar, denominator erit: $= \frac{-\pi}{b\,\text{ſin.}\,\frac{a\pi}{b}}$.

Caete-

Caeterum omnes iſtae formulae prorſus inter ſe conuenire ſunt cenſendae, quoniam omnes ex prima per reductiones ſupra traditas ſunt deductae, ſi modo partes abſolutae negligantur. Tanta enim eſt vis harum formularum, vt, etiamſi reductiones iſtae tam pro numeratore quam denominatore ſeorſim ſumtae falſae eſſent futurae, tamen hi duo errores ſe mutuo iterum deſtruant.

## Exemplum.

§. 29. Sumamus $b = 2$, ſitque $a = -5$ et $\alpha = -4$, vnde hae ſeries naſcuntur:

$$(1-xx)^{\frac{5}{2}} = 1 - \tfrac{5}{2}xx + \tfrac{5.3}{2.4}x^4 - \tfrac{5.3.1}{2.4.6}x^6 - \tfrac{5.3.1.1}{2.4.6.8}x^8 - \tfrac{5.3.1.1.3}{2.4.6.8.10}x^{10} - \text{etc. et}$$

$$(1-xx)^2 = 1 - 2xx + x^4,$$

vnde ſeries ſummanda erit

$$S = 1 + 5 + \tfrac{15}{8} = \tfrac{63}{8}.$$

Iam quoniam hic demum $a + 3b$ fit quantitas poſitiua, nempe $a + 3b = 1$, vtendum erit formula ſecunda, vnde colligitur:

$$S = \frac{9.7.5}{5.3.1}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)^{-3}}} : \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}},$$

vbi denominator eſt $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$; at vero numerator eſt $\int \partial x \sqrt{(1-xx)^3}$, quae formula per reductionem priorem §. 10. poſito $a = 1$ et $b = 2$ praebet:

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{c}{2}} = \tfrac{c}{1+c}\int \partial x (1-xx)^{\frac{c}{2}-1},$$

vnde ob $c = 3$ fiet

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{4}\int \partial x (1+xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Porro autem quia hic $c = 1$, erit

$$\int \partial x (1-xx)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \tfrac{\pi}{4},$$



vnde

vnde pro numeratore habebimus:

$$\int \partial x\,(1 - x\,x)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3\pi}{16},$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſumma quaeſita prodit:

$$S = \frac{9.7.5}{5.3.1} \cdot \frac{3\pi}{16} : \frac{\pi}{2} = \frac{63}{8},$$

id quod egregie conuenit cum vera ſumma.

## Alia methodus
### earundum ſerierum ſummas inueniendi.

§. 30. Praecedentes ſummas elicuimus ex ipſa indole ſerierum, qua ſinguli termini ſunt producta ex binis vnciis duarum poteſtatum Binomii. Quoniam autem non ita pridem (*) demonſtraui, ſi ſeries ita formetur, vt ſit

$$S = 1 + (\tfrac{m}{1})(\tfrac{n}{1}) + (\tfrac{m}{2})(\tfrac{n}{2}) + (\tfrac{m}{3})(\tfrac{n}{3}) + (\tfrac{m}{4})(\tfrac{n}{4}) + \text{etc.}$$

tum fore $S = (\frac{m+n}{m})$, vel etiam $S = (\frac{m+n}{n})$, cuius valor more ſolito euolutus praebet:

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \frac{m+n-3}{4} \cdots\cdots \frac{m+1}{n},$$

qui ergo valor, quoties $m$ et $n$ ſunt numeri integri, ſemper facile aſſignari poteſt. Quando autem pro his numeris fractiones accipiuntur, huius expreſſionis valorem ſequenti modo per formulas integrales exhibui, vt ſit

$$S = \frac{\int u^{m+1}\,\partial x}{\int u^m\,\partial x \cdot \int u^n\,\partial x},$$

exiſtente $u = l\,\frac{1}{x}$, tum vero integralibus ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſis.

§. 31. Iſta autem expreſſio ad noſtrum inſtitutum non ſatis idonea videtur, propterea quod quadraturas curuarum tranſcendentium inuoluit; at vero, re penitius conſiderata, inueni valo-

(*) V. Acta Acad. Imp. Sc. pro anno 1781. P. I. pag. 94 et 95.

valorem eiusdem formulae $(\frac{m+n}{n})$ etiam poſſe ad quadraturas curuarum algebraicarum reuocari, quae adeo ſimpliciores prodierunt quam illae, quas methodo praecedenti ſumus adepti, neque etiam eo incommodo laborant, vt pro diuerſis exponentibus alias atque alias reductiones poſtulent. Hanc igitur nouam methodum hic clarius ſum expoſiturus.

§. 32. Haec autem methodus deducta eſt ex reductionibus ſupra §. 12. allatis, vbi poſuimus

$$\Delta = \int x^{a-1} \partial x \, (1 - x^b)^{\frac{c}{b} - 1}.$$

Hic autem ſumamus ſtatim $b = 1$ et $a = 1$, ita vt ſit:

$$\Delta = \int \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c},$$

tum autem reductiones §. 12. allatae ſequenti modo ſe habebunt:

$$\int x \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \Delta,$$

$$\int x x \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \Delta,$$

$$\int x^3 \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \Delta,$$

$$\int x^4 \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \frac{4}{c+4} \cdot \Delta,$$

etc. etc.

vnde concluditur in genere fore:

$$\int x^\lambda \partial x \, (1 - x)^{c-1} = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{2}{c+2} \cdot \frac{3}{c+3} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{c+\lambda} \cdot \Delta.$$

§. 33. Quodſi iam poſtrema formula inuertatur, reperietur

$$\frac{\Delta}{\int x^\lambda \partial x \, (1 - x)^{c-1}} = \frac{c+1}{1} \cdot \frac{c+2}{2} \cdot \frac{c+3}{3} \cdot \frac{c+4}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{c+\lambda}{\lambda},$$

hoc autem productum, ſi numeratores ordine inuerſo ſcribantur, hanc induet formam:

$$\frac{c+\lambda}{1} \cdot \frac{c+\lambda-1}{2} \cdot \frac{c+\lambda-2}{3} \cdot \frac{c+\lambda-3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{c+1}{\lambda},$$

 quam

quamobrem cum ſumma quaeſita $S = (\frac{m+n}{n})$ euoluta dederit

$$S = \frac{m+n}{1} \cdot \frac{m+n-1}{2} \cdot \frac{m+n-2}{3} \cdot \ldots \ldots \frac{m+1}{n},$$

illa forma manifeſto in hanc transformatur, ſumendo $c = m$ $\lambda = n$, ex quibus fit $\Delta = \frac{1}{m}$, et ipſa ſumma quaeſita exprimetur hoc modo: $S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}}$, atque cum ambos numeros $m$ et $n$ inter ſe permutare liceat, erit etiam

$$S = \frac{1}{m \int x^m \partial x (1-x)^{n-1}}.$$

§. 34. Haec expreſſio, quoties $m$ et $n$ ſunt numeri integri, manifeſto veram ſummam ſuppeditat. Sit exempli gratia $m = 4$ et $n = 3$, et quia

$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4 \text{ et}$$
$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

erit ſeries ſummanda $S = 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 35$. At vero per formulam integralem priorem habemus $S = \frac{1}{4 \int x^3 \partial x (1-x)^3}$, per formulam autem poſteriorem erit $S = \frac{1}{3 \int x^4 \partial x (1-x)^2}$. Eſt vero pro priore $\int x^3 \partial x (1-x)^3 = \frac{1}{140}$, pro altera vero eſt

$$\int x^4 \partial x (1-x)^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105},$$

ita vt ex vtraque formula prodeat $S = 35$.

§. 35. In reductionibus quidem, vnde has expreſſiones hauſimus, integralia ita accipi aſſumſimus, vt a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendantur. Verum hic eadem circumſtantia commode vſu venit, quam in praecedente ſolutione obſeruauimus, quod formula hic inuenta etiam locum obtineat, etiamſi exponentes fuerint negatiui, quibus quippe caſibus eam regulam obſeruare non licet; namque hic etiam gemini

mini errores ſe mutuo deſtruunt. Ita ſi fuerit $m = -4$ et $n = 3$, fiet

$$(1+z)^{-4} = 1 - 4z + 10zz - 20z^3 + 35z^4 - 56z^5 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^3 = 1 + 3z + 3zz + z^3,$$

ſicque ſeries ſummanda erit

$$S = 1 - 3.4 + 3.10 - 1.20 = -1.$$

At vero poſterior formula integralis dat $S = \frac{1}{3\int \frac{\partial x}{x^4}(1-x)^2}$.

Eſt vero

$$\int \frac{\partial x}{x^4}(1-x)^2 = \frac{-1}{3x^3} + \frac{2}{2xx} - \frac{1}{x},$$

quae expreſſio euaneſcit facto $x = \infty$, ea vero poſito $x = 1$ dat $-\frac{1}{3}$. Sin autem ambo numeri $m$ et $n$ ſumerentur negatiui, ſumma ſeriei manifeſto fieret infinita.

§. 36. Cum autem caſus, quibus $m$ et $n$ ſunt numeri integri, nullam difficultatem pariant, vſus praecipuus noſtrae formulae tum locum habebit, quando numeri $m$ et $n$ ſunt fracti. Ita ſi fuerit $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, ob

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1.1}{2.4}zz + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}z^3 - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}z^4 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1.3}{2.4}zz - \tfrac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 - \text{etc.}$$

erit ſeries ſummanda:

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} - \tfrac{1.1}{2.4}.\tfrac{1.3}{2.4} - \tfrac{1.1.3}{2.4.6}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \text{etc.}$$

At vero formula integralis prior nobis dat $S = \frac{2}{\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}}}$. Iam vero poſito $x = yy$, fit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt{(1-yy)}} = \pi,$$

ita

ita vt hinc fiat $S = \frac{2}{\pi}$, quam ſummam iam ſupra pro eodem caſu inuenimus.

§. 37. Pro aliis caſibus plurimum iuuabit reductiones ſupra expoſitas in vſum vocare, quod quo facilius fieri poſſit conſideremus hanc formam generalem: $\int x^q \partial x (1-x)^r$, atque ſex illae reductiones ſupra in Corollariis Lemmatum allatae praebebunt ſequentes:

$$\text{I. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^{r-1},$$

$$\text{II. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{r+1},$$

$$\text{III. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{q+1} \int x^{q+1} \partial x (1-x)^{r},$$

$$\text{IV. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q}{q+r+1} \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{r},$$

$$\text{V. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{r}{q+r+1} \int x^{q} \partial x (1-x)^{r-1},$$

$$\text{VI. } \int x^q \partial x (1-x)^r = \frac{q+r+2}{r+1} \int x^{q} \partial x (1-x)^{r+1}.$$

§. 38. Ope harum reductionum prior expreſſio pro ſumma inuenta $S = \frac{1}{m \int x^n \partial x (1-x)^{m-1}}$, vbi $q = n$ et $r = m-1$, in ſequentes ſex formas transfundi poterit:

$$\text{I. } S = \frac{n+1}{m(m-1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-2}},$$

$$\text{II. } S = \frac{1}{n \int x^{n-1} \partial x (1-x)^{m}},$$

$$\text{III. } S = \frac{n+1}{m(m+n+1) \int x^{n+1} \partial x (1-x)^{m-1}},$$

$$\text{IV. } S = \frac{m+n}{m n \int x^{n-1} \partial x (1-x)^{m-1}},$$

V.

$$\text{V. } S = \frac{m+n}{m(m-1)\int x^n \partial x (1-x)^{m-2}},$$

$$\text{VI. } S = \frac{1}{(m+n+1)\int x^n \partial x (1-x)^m}.$$

quae eaedem formae etiam ex poſteriore ſequuntur.

§. 39. Reductiones autem iſtae ſemper ita in vſum trahi poſſunt, vt in formula integrali ambo exponentes ipſius $x$ et $1-x$ intra terminos 0 et $-1$ redigantur, quippe quae formae praecipue conſiderari ſolent. Ita ſi fuerit $m = \frac{7}{2}$ et $n = 4$, hinc fiet:

$$(1+z)^{\frac{7}{2}} = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + \text{etc. et}$$
$$(1+z)^4 = 1 + 4z + 6zz + 4z^3 + z^4$$

ita vt ſeries ſummanda ſit $S = 1 + 4A + 6B + 4C + D$; at vero erit $S = \frac{2}{7\int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}}}$, vbi $q = 4$ et $r = \frac{5}{2}$. Primo ergo exponentem $q$ vsque ad nihilum deprimere poterimus, id quod ope reductionis IV fit, hinc enim erit

$$\int x^4 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{8}{15}\int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

porro vero

$$\int x^3 \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{6}{13}\int x\,x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

deinde

$$\int x\,x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{4}{11}\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

denique

$$\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{9}\int x \partial x (1-x)^{\frac{5}{2}};$$

ſicque iam habemus:

$$S = \frac{2.\ 15.\ 13.\ 11.\ 9}{7.\ 8.\ 6.\ 4.\ 2 \int \partial x\, (1 - x)^{\frac{5}{2}}}.$$

§. 40. Cum porro $r$ ſit $= \frac{5}{2}$, deprimetur hic exponens per reductionem V, vnde ob $q = 0$ et $r = \frac{5}{2}$, fit

$$\int \partial x\, (1 - x)^{\frac{5}{2}} = \tfrac{5}{7} \int \partial x\, (1 - x)^{\frac{3}{2}};$$

eodem modo erit

$$\int \partial x\, (1 - x)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{5} \int \partial x\, (1 - x)^{\frac{1}{2}};$$

denique

$$\int \partial x\, (1 - x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3} \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x)}};$$

ex quibus conficitur:

$$S = \frac{2.\ 15.\ 13.\ 11.\ 9.\ 7.\ 5.\ 3}{7.\ 8.\ 6.\ 4.\ 2.\ 5.3.\ 1 \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x)}}}.$$

Eſt vero

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x)}} = 2 - 2\sqrt{(1 - x)},$$

ſicque eius valor erit $= 2$, et euoluto calculo reperietur $S = \frac{6435}{128}$.

§. 41. Cum iam fuerit $m = \frac{7}{2}$, erit

$$A = \tfrac{7}{2},\ B = \tfrac{7.5}{2.4},\ C = \tfrac{7.5.3}{2.4.6},\ D = \tfrac{7.5.3.1}{2.4.6.8},$$

ita vt noſtra ſeries ſummanda ſit:

$$S = 1 + 14 + \tfrac{105}{4} + \tfrac{35}{4} + \tfrac{35}{128} = \tfrac{6435}{128},$$

id quod egregie conuenit cum ſumma ante inuenta.

§. 42. Quod porro ad eas ſeries attinet, quas per terminum generalem $(\frac{m}{x})\,(\frac{n}{p+x})$ indicauimus, vbi loco $x$ ordine

dine ſcribendi ſunt numeri 0, 1, 2, 3, 4, etc. ita vt ſit $S = \int (\frac{m}{x})(\frac{n}{p+x})$, oſtendi fore $S = (\frac{m+n}{m+x})$ vel etiam $S = (\frac{m+n}{n-p})$; vnde patet hanc ſummam eandem fore, ac ſi ſeries propoſita eſſet $(\frac{m+p}{x})(\frac{n-p}{x})$. Quamobrem ad hanc ſummam formulae noſtrae ſupra datae accommodabuntur, ſi in iis loco litterarum $m$ et $n$ ſcribantur hi valores, $m+p$ et $n-p$, ſicque ex priore formula haec ſumma erit:

$$S = \frac{1}{(m+p)\int x^{n-p}\,\partial x\,(1-x)^{m+p-1}},$$

ex poſteriore autem erit:

$$S = \frac{1}{(n-p)\int x^{m+p}\,\partial x\,(1-x)^{n-p-1}},$$

ſicque totum hoc argumentum ad finem perductum eſt cenſendum.

§. 42. Vnicum tantum caſum hic adieciſſe operae erit pretium, quo $m+n=1$, ideoque $m=1-n$, eritque ſumma ſeriei ex formula IV. §. 38.

$$S = \frac{1}{n(1-n)\int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{(1-x)^n}},$$

quod integrale commode per arcum circuli exprimi poterit: erit enim $\int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\text{ſin. } n\pi}$, ita vt ſumma ſeriei propoſitae ſit $S = \frac{\text{ſin. } n\pi}{mn\pi}$. Vnde ſi fuerit $m = \frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$, erit $S = \frac{4}{\pi}$, quae eſt ſumma ſeriei:

$$1 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1.1}{2.4})^2 + (\tfrac{1.1.3}{2.4.6})^2 + (\tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8})^2 + \text{etc.}$$

vti iam ſupra notauimus. Deinde ſi ſumamus $m = \frac{1}{3}$ et $n = \frac{2}{3}$ ob

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1.2}{3.6}zz + \tfrac{1.2.5}{3.6.9}z^3 - \text{etc. et}$$

$$(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}z - \tfrac{2.1}{3.6}zz + \tfrac{2.1.4}{3.6.9}z^3 - \tfrac{2.1.4.7}{3.6.9.12}z^4 + \text{etc.}$$

ſeries ſummada erit

$$S = 1 + \tfrac{1.2}{3.3} + \tfrac{1.2}{3.6}\cdot\tfrac{2.1}{3.6} + \tfrac{1.2.5}{3.6.9}\cdot\tfrac{2.1.4}{3.6.9} + \tfrac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\cdot\tfrac{2.1.4.7}{3.6.9.12} + \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma, ob ſin. $\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, per quadraturam circuli exprimi poterit, eritque $S = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$. Eodem modo ſi ſumamus $m = \frac{1}{4}$ et $n = \frac{3}{4}$, erit ſeries ſummanda

$$S = 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1.3}{4.8}\cdot\tfrac{3.1}{4.8} + \tfrac{1.3.7}{4.8.12}\cdot\tfrac{3.1.5}{4.8.12} + \tfrac{1.3.7.11}{4.8.12.16}\cdot\tfrac{3.1.5.9}{4.8.12.16} + \text{etc.}$$

cuius autem ſumma, ob ſin. $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $S = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$, ſeries autem iſta ita ſuccincte exhiberi poteſt:

$$S = 1 + \tfrac{3}{4^2}\left(1 + \tfrac{1.3}{8^2} + \tfrac{1.3.5.7}{8^2.12^2} + \tfrac{1.3.5.7.9.11}{8^2.12^2.16^2} + \text{etc.}\right).$$

EX-

# EXERCITATIO ANALYTICA.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die 3 Octobr. 1776.*

§. 1.

Conſideranti productum infinitum coſinum cuiusque anguli exprimens, quod eſt

$$\cos.\frac{\pi}{2n} = \left(1 - \frac{1}{nn}\right)\left(1 - \frac{1}{9nn}\right)\left(1 - \frac{1}{25nn}\right)\left(1 - \frac{1}{49nn}\right) \text{ etc.}$$

in mentem venit methodum inueſtigare, cuius ope viciſſim ex indole iſtius producti eius valor, quem nouimus eſſe $= \cos.\frac{\pi}{2n}$, erui queat, in quo negotio plura ſe obtulere artificia, quorum explicationem Geometris haud ingratam fore confido.

§. 2. Pono igitur

$$S = \left(1 - \frac{1}{nn}\right)\left(1 - \frac{1}{9nn}\right)\left(1 - \frac{1}{25nn}\right) \text{ etc.}$$

et ſumtis logarithmis prodit mihi:

$$lS = l\left(1 - \frac{1}{nn}\right) + l\left(1 - \frac{1}{9nn}\right) + l\left(1 - \frac{1}{25nn}\right) + \text{ etc.}$$

et cum ſit

$$l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{ etc.}$$

erit his ſeriebus ordine diſpoſitis ſignisque mutatis:

$$-lS = \frac{1}{nn} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{3n^6} + \frac{1}{4n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{9nn} + \frac{1}{2.9^2 n^4} + \frac{1}{3.9^3 n^6} + \frac{1}{4.9^4 n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{25.nn} + \frac{1}{2.25^2.n^4} + \frac{1}{3.25^3.n^6} + \frac{1}{4.25^4.n^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{49.nn} + \frac{1}{2.49^2.n^4} + \frac{1}{3.49^3.n^6} + \frac{1}{4.49^4.n^8} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

§. 3. Quodſi iam ſingulas columnas verticales in ordinem diſponamus, ſequentes ſeries pro $-lS$ obtinebimus:

$$-lS = \frac{1}{nn}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{2.n^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{3.n^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1}{4.n^8}\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Sicque negotium perductum eſt ad ſummationem ſerierum poteſtatum parium progreſſionis harmonicae $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, etc.

§. 4. Oſtendi autem olim, poſito breuitatis gratia $\frac{\pi}{2} = \varrho$, ſi harum poteſtatum ſummae repraeſententur ſequenti modo:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = A\,\varrho^2,$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = B\,\varrho^4,$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = C\,\varrho^6,$$
$$\text{etc.}$$

primo eſſe $A = \frac{1}{2}$, tum vero litteras reliquas ſequenti modo per praecedentes determinari:

$$B = \tfrac{2}{3}A^2,\ C = \tfrac{2}{5}.2AB,\ D = \tfrac{2}{7}(2AC + BB),$$
$$E = \tfrac{2}{9}(2AD + 2BC),\ F = \tfrac{2}{11}(2AE + 2BD + CC),\ \text{etc.}$$

cuius

cuius veritas ſimul ex pulcherrimo conſenſu huius Analyſeos elucebit.

§. 5. His igitur valoribus ſubſtitutis nanciſcimur hanc ſeriem:

$$-lS = \frac{A\rho^2}{nn} + \frac{1}{2}\cdot\frac{B\rho^4}{n^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C\rho^6}{n^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{D\rho^8}{n^8} + \text{etc.}$$

Quod ſi igitur ponamus $\frac{\rho}{n} = x$, vt ſit $x = \frac{\pi}{2n}$, iſta ſeries hanc induet formam:

$$-lS = Axx + \tfrac{1}{2}Bx^4 + \tfrac{1}{3}Cx^6 + \tfrac{1}{4}Dx^8 + \text{etc.}$$

Vt fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. abigamus, differentiemus, ac facta diuiſione per $2\partial x$ conſequemur.

$$-\frac{\partial S}{2S\partial x} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

§. 6. Statuamus hic breuitatis gratia $-\frac{\partial S}{2S\partial x} = t$, vt habeamus;

$$t = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

vnde ſumtis quadratis orietur haec ſeries:

$$\begin{array}{llllll} tt = A^2xx & + 2ABx^4 & + 2ACx^6 & + 2ADx^8 & + 2AEx^{10} & + \text{etc.} \\ & & + BB & + 2BC & + 2BD & + \text{etc.} \\ & & & & + CC & + \text{etc.} \end{array}$$

ſicque iam pro quauis poteſtate ipſius $x$ eas nacti ſumus formulas, quibus determinatio litterarum A, B, C, D, continetur: deſunt tantum coëfficientes illi $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, etc.

§. 7. Hos autem coëfficientes introducemus integrando, poſtquam per $2\partial x$ multiplicauerimus. Reperietur enim

$$2\int tt\partial x = \tfrac{2}{3}A^2x^3 + \tfrac{2}{5}\cdot 2ABx^5 + \tfrac{2}{7}(2AC + BB)x^7$$
$$+ \tfrac{2}{9}(2AD + 2BC)x^9 + \tfrac{2}{11}(2AE + 2BD + CC)x^{11} + \text{etc.}$$

Cum nunc ſit

$$\tfrac{2}{3}A^2 = B,\ \tfrac{2}{5}\cdot 2AB = C,\ \tfrac{2}{7}(2AC + BB) = D,\ \text{etc.}$$

his

his valoribus reſtitutis perueniemus ad hanc ſeriem:

$$2\int tt\,\partial x = \mathrm{B}\,x^3 + \mathrm{C}\,x^5 + \mathrm{D}\,x^7 + \mathrm{E}\,x^9 + \text{etc.}$$

§. 8. Cum igitur ante habuiſſemus hanc ſeriem:

$$t = \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,x^3 + \mathrm{C}\,x^5 + \mathrm{D}\,x^7 + \text{etc.}$$

hinc manifeſto fluit iſta aequatio:

$$t = \mathrm{A}\,x + 2\int tt\,\partial x,$$

quae differentiata dat

$$\partial t = \mathrm{A}\,\partial x + 2\,tt\,\partial x = \tfrac{1}{2}\,\partial x + 2\,tt\,\partial x, \text{ ob } \mathrm{A} = \tfrac{1}{2}.$$

Hinc ergo habebimus $2\,\partial t = \partial x\,(1 + 4\,tt)$, vnde fit $\partial x = \frac{2\,\partial t}{1 + 4\,tt}$, cuius integrale in promptu eſt, ſcilicet $x = \mathrm{A}$ tang. $2\,t$, vbi conſtantis adiectione non eſt opus, quandoquidem poſito $x = 0$ $t$ iam ſponte euaneſcit. Hac ergo aequatione inuenta, ſi quantitas $x$ vt angulus ſpectetur, viciſſim erit $2\,t =$ tang. $x$. Erat vero $t = -\frac{\partial \mathrm{S}}{2\,\mathrm{S}\,\partial x}$, vnde colligitur haec aequatio:

$$-\frac{\partial \mathrm{S}}{\mathrm{S}\,\partial x} = \text{tang. } x, \text{ ideoque } -\frac{\partial \mathrm{S}}{\mathrm{S}} = \frac{\partial x\,\text{ſin. } x}{\text{coſ. } x}.$$

§. 9. Cum igitur ſit $\partial x$ ſin. $x = -\partial.$ coſ. $x$, erit $\frac{\partial \mathrm{S}}{\mathrm{S}} = \frac{\partial.\,\text{coſ. } x}{\text{coſ. } x}$, hincque integrando $l\,\mathrm{S} = l$ coſ. $x + \mathrm{C}$, quae conſtans inde debet definiri, vt poſito $x = 0$ fiat $l\,\mathrm{S} = 0$. Hinc ergo erit $\mathrm{C} = 0$, ita vt ſit $l\,\mathrm{S} = l$ coſ. $x$, ideoque ad numeros progrediendo fiet $\mathrm{S} =$ coſ. $x$.

§. 10. Poſueramus autem $x = \frac{\pi}{2\,n}$, vnde manifeſto valor quaeſitus S prodit $\mathrm{S} =$ coſ. $\frac{\pi}{2\,n}$, prorſus vti iam ante conſtabat. Haec igitur Analyſis egregie confirmat illam relationem inter litteras A, B, C, D, quam aliunde in calculum introduxi.

EVO-

# EVOLVTIO PROBLEMATIS CVIVS SOLVTIO ANALYTICA EST DIFFICILLIMA, DVM SYNTHETICA PER SE EST OBVIA.

Auctore

*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die* 16 *Ian.* 1777.

1.

Problema, quod hic euoluendum ſuſcipimus, ita ſe habet: *Circa punctum fixum A deſcribere curuam C M, vt ductis ad ſingula puncta M radiis oſculi M R, diſtantia A R vbique ſit eiusdem magnitudinis.* Hic primo ſtatim patet huic problemati ſatisfacere curuam ex euolutione circuli natam, cuius centrum ſit in puncto A, radius vero diſtantiae propoſitae AR aequalis. Deſcripto enim centro A radio A C circulo, ſi peripheriae filum circumplicetur, quod ex C euolutum producat curuam C M, eius radius oſculi in M erit recta M R, circulum in R tangens, ita vt puncti R diſtantia a puncto A vbique ſit eadem. Tab. I. Fig. 1. Fig. 2.

§. 2. Praeterea vero etiam euidens eſt huic problemati omnes ſatisfacere circulos, quocunque radio deſcriptos, quorum centra propoſitam teneant a puncto A diſtantiam. Si enim circa punctum R, cuius diſtantia ab A eſt data, radio quo- Fig. 3.

cunque R C deſcribatur circulus C M, quia eius radius oſculi in M eſt M R, diſtantia praeſcripta A R vtique pro omnibus punctis M eſt eadem. Sicque problema propoſitum duplicem admittit ſolutionem, quarum altera praebet curuas ex euolutione circuli, cuius radius A C datur, natas, altera vero complectitur infinities-infinitos circulos, quorum centra a puncto A datam teneant diſtantiam. Ex quo iam intelligimus, ſolutionem iſtius problematis analyticam ita comparatam eſſe debere, vt ambas ſolutiones memoratas in ſe complectatur.

§. 3. At vero ſolutio analytica haud parum debet eſſe ardua, propterea quod radius oſculi, qui per differentialia ſecundi gradus determinatur, in computum ingreditur. Interim tamen haec ſolutio ſequenti modo commodiſſime inſtitui poſſe videtur. Poſita diſtantia data $AR = a$, pro puncto cur-
Tab. I. Fig. 1. vae quocunque M vocetur diſtantia $AM = z$, ductaque ad M tangente M P, in eam ex A demittatur perpendiculum A P, quod vocemus $AP = p$, ac primo quidem quaeramus aequationem inter has binas variabiles $AM = z$ et $AP = p$, quandoquidem hinc deinceps haud difficulter aequatio inter coordinatas ſolitas deduci poteſt. Has autem binas variabiles ideo eligi conuenit, quod ex iis radius oſculi M R ſimpliciſſime exprimi poteſt, ſiquidem habetur $MR = \frac{z \partial z}{\partial p}$, ita vt tantum differentialia primi gradus inuoluat.

§. 4. Quod ſi iam ex A ad radium oſculi M R ducatur normalis A Q, quae tangenti M P erit parallela et aequalis, erit quoque $MQ = AP = p$, ideoque $QR = \frac{z \partial z}{\partial p} - p$. Quoniam igitur eſt $AQ = \sqrt{(zz - pp)}$, ob $AR = a$ habebitur iſta aequatio pro curua quaeſita:

$$aa = (zz - pp) + \left(\frac{z \partial z}{\partial p} - p\right)^2, \text{ ſiue}$$

$$aa = zz - pp + \frac{(z \partial z - p \partial p)^2}{\partial p^2}.$$

Quare

Quare ſi ponamus $zz - pp = tt$, ita vt ſit

$$t = \surd(zz - pp) = \mathrm{MP} = \mathrm{AQ},$$

ſtatim habemus hanc aequationem maxime concinnam:

$$aa = tt + \frac{tt\partial t^2}{\partial p^2}, \text{ ideoque}$$

$$aa\partial p^2 = tt(\partial p^2 + \partial t^2),$$

quae duas tantum continet variabiles $p$ et $t$, vnde elicitur

$$\partial p = \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}.$$

§. 5. Quanquam iam integratio eſt facillima, antequam eius integrale conſideremus, manifeſtum eſt huic aequationi differentiali ſatisfacere valorem $t = a$, quoniam hinc fractionis $\frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}$ tam numerator quam denominator euaneſcunt. Hoc autem accuratius ita oſtendi poteſt. Quoniam immediate deducti ſumus ad hanc aequationem:

$$\partial p\surd(aa - tt) - t\partial t = 0,$$

haec ad formam $\mathrm{M}\partial \mathrm{V} = 0$ reducta praebet

$$\surd(aa - tt)\left(\partial p - \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)}\right) = 0,$$

ita vt hic ſit

$$\mathrm{M} = \surd(aa - tt) \text{ et } \partial \mathrm{V} = \partial p - \frac{t\partial t}{\surd(aa - tt)},$$

Perſpicuum autem eſt, quoties ſolutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem $\mathrm{M}\partial \mathrm{V} = 0$, eam complecti geminam ſolutionem, alteram $\mathrm{M} = 0$, alteram vero $\partial \mathrm{V} = 0$, ex qua poſteriore demum integrando prodit $\mathrm{V} = \mathrm{Conſt.}$ Neque igitur mirandum eſt priorem ſolutionem $\mathrm{M} = 0$ non in altera $\mathrm{V} = \mathrm{C}$ contineri, multoque minus paradoxon videri debet quod ſaepenumero aequationi differentiali eiusmodi valores ſatisfacere queant, qui in integrali completo non contineantur.

 §. 6.

§. 6. Cum igitur noſtro caſu ſit $M = \sqrt{(aa - tt)}$ et $\partial V = \partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$, hinc aequatio inuenta duplicem manifeſto inuoluit ſolutionem; ac prior quidem ſtatim ſequitur ex valore $M = \sqrt{(aa - tt)} = 0$, qui dat $t = a$, vnde cum ſit $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $p = \sqrt{(zz - aa)}$; ex quo perſpicuum eſt in figura interuallum QR euaneſcere, et interuallum AQ eſſe conſtans, quae conditio ſatis clare curuam ex euolutione circuli, cuius radius $= AQ$, natam declarat, quod idem vero etiam analytice ex ipſa aequatione $p = \sqrt{(zz - aa)}$ oſtendi poteſt.

Tab. I. Fig. 4. §. 7. Hunc in finem accipiamus rectam quandam AC pro axe fixo, ac vocemus angulum $CAM = \Phi$, et pro puncto curuae proximo erit $Am = z + \partial z$ et angulus $MAm = \partial \Phi$, ſicque deſcripto centro A arculo $Mp$ erit $mp = \partial z$ et $Mp = z \partial \Phi$, vnde elementum curuae naſcitur

$$Mm = \sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}.$$

Hinc iam ſimilitudo triangulorum $mMp$ et $mAP$ praebet:

$$Mm : Mp = mA : AP = MA : AP, \text{ ſiue}$$

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)} : z \partial \Phi = z : p,$$

vnde fit $p = \frac{zz \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}}$. Quoniam igitur inuenimus $p = \sqrt{(zz - aa)}$, ſumtis quadratis erit

$$zz - aa = \frac{z^4 \partial \Phi^2}{\partial z^2 + zz \partial \Phi^2},$$

vnde fit $\partial \Phi = \frac{\partial z \sqrt{(zz - aa)}}{az}$, quae formula, ponendo

$$\sqrt{(zz - aa)} = v,$$

ob $zz = aa + vv$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{v \partial v}{aa + vv}$, ab irrationalitate liberata praebet $\partial \Phi = \frac{vv \partial v}{a(aa + vv)}$, ſiue $\partial \Phi = \frac{\partial v}{a} - \frac{a \partial v}{aa + vv}$, vnde integrando colligitur $\Phi = \frac{v}{a} - \text{A tang.} \frac{v}{a}$.

§. 8. Denotet $\omega$ angulum cuius tangens eſt $\frac{v}{a}$, ita vt ſit $v = a \text{ tang.} \omega$, ideoque $z = \frac{a}{\text{coſ.} \omega}$, hincque porro angulus

lus $\Phi = \text{tang.}\,\omega - \omega$. Ad has formulas conſtruendas centro A, radio $AC = a$, deſcribamus circulum, in quo capiamus $CR = a\,\text{tang.}\,\omega$, cui aequalem ſumamus tangentem circuli $RM$, ita vt ſit $RM = a\,\text{tang.}\,\omega$, vnde ducta recta $AM$, ob $AR = a$ euidens eſt fore angulum $RAM = \omega$, hincque ipſam rectam $AM = \frac{a}{\text{coſ}\,\omega}$, ſicque haec recta $AM$ aequatur noſtrae lineae $z$. Praeterea vero cum ſit angulus $CAR = \frac{CR}{CA} = \text{tang.}\,\omega$, ſi angulus $MAR = \omega$ ab eo ſubtrahatur, remanebit angulus $CAM = \text{tang.}\,\omega - \omega$, ideoque $CAM = \Phi$, ſicque punctum M revera erit in curua quaeſita, quam ergo ob $MR = CR$ patet generari ex euolutione arcus circuli $CR$, quae eſt prior ſolutio initio commemorata. Tab. I. Fig. 5.

§. 9. Altera vero ſolutio petenda eſt ex aequatione differentiali $\partial V = 0$, ſiue

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

cuius integrale dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$. Quia vero eſt $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $\sqrt{(aa - tt)} = \sqrt{(aa - zz + pp)}$, ſicque aequatio noſtra erit: $\sqrt{(aa - zz + pp)} = c - p$; ſumtisque quadratis $aa - zz = cc - 2cp$, vnde deducimus

$$p = \frac{cc - aa + zz}{2c}.$$

Modo ante autem vidimus, poſito angulo $CAM = \Phi$, eſſe

$$p = \frac{zz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}};$$

quare ſi breuitatis gratia ponamus $cc - aa = bb$, erit

$$\frac{2czz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}} = bb + zz,$$

ex qua aequatione elicitur:

$$\partial\Phi = \frac{(bb + zz)\,\partial z}{z\sqrt{[4cczz - (bb + zz)^2]}},$$

quae aequatio, quantumuis perplexa, tamen praeter circulos

 nullas

nullas alias curuas in ſe complectitur, quod quomodo eueniat nobis eſt oſtendendum.

§. 10. Quo hanc formulam ſimpliciorem reddamus ſimulque litterarum numerum diminuamus, ponamus $zz = bbv$, vt ſit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{2v}$, tum vero ponatur $4cc = (2n + 2)bb$, vbi meminiſſe oportet eſſe $bb = cc - aa$, quo facto noſtra aequatio fiet

$$\partial \Phi = \frac{(1 + v)\partial v}{2v\surd(2nv - vv - 1)},$$

quae aequatio commode in duas partes reſoluitur hoc modo:

$$2\partial \Phi = \frac{\partial v}{\surd(2nv - vv - 1)} + \frac{\partial v}{v\surd(2nv - vv - 1)},$$

in qua poſteriore parte ſi ponamus $v = \frac{1}{u}$, habebimus hanc aequationem integrandam:

$$2\partial \Phi = \frac{\partial v}{\surd(2nv - vv - 1)} - \frac{\partial u}{\surd(2nu - uu - 1)},$$

ſicque ſufficiet altervtram tantum partem integraſſe.

§. 11. Pro priore parte introducamus quempiam angulum $\theta$, ponendo $v = \alpha + \beta\,\text{coſ.}\,\theta$, et quantitas $2nv - vv - 1$ induet hanc formam:

$$\begin{array}{l} \quad 2n\alpha + 2n\beta\,\text{coſ.}\,\theta - \beta^2\,\text{coſ.}\,\theta \\ - \alpha\alpha - 2\alpha\beta\,\text{coſ.}\,\theta \\ - 1 \end{array}$$

vbi primo termini coſ. $\theta$ inuoluentes tollantur, quod fit ſumendo $\alpha = n$, tum vero ſtatuatur $2\alpha n - \alpha\alpha - 1 = \beta\beta$, vt iſta forma tranſeat in $\beta\beta\,\text{ſin.}\,\theta^2$. Quia vero eſt $\alpha = n$, altera littera $\beta$ ex hac aequatione definietur:

$$2nn - nn - 1 = nn - 1 = \beta\beta,$$

ideoque eſt $\beta = \surd(nn - 1)$, atque hinc prior formula $\frac{\partial v}{\surd(2nv - vv - 1)}$ transmutatur in hanc: $-\partial\theta$, cuius ergo integrale eſt $-\theta$. Cum igitur poſuerimus $v = n + \text{coſ.}\,\theta.\surd(nn - 1)$, erit $\text{coſ.}\,\theta = \frac{v - n}{\surd(nn - 1)}$,

ideo-

ideoque $\theta = \text{A cof.} \frac{v - n}{\sqrt{(nn - 1)}}$. Simili modo erit integrale poſterioris partis

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu - uu - 1)}} = -\text{A cof.} \frac{u - n}{\sqrt{(nn - 1)}} = -\text{A cof.} \frac{1 - nv}{\sqrt{(nn - 1)}},$$

vnde conficitur integrale quaeſitum:

$$2\Phi = -\text{A cof.} \frac{v - n}{\sqrt{(nn - 1)}} + \text{A cof.} \frac{1 - nv}{v\sqrt{(nn - 1)}} + \text{C}.$$

§. 12. Hinc igitur ſi priorem arcum, vti fecimus, per $\theta$ deſignemus, poſteriorem vero per $\eta$, ita vt ſit $2\Phi = \eta - \theta$, quoniam habemus:

$$\text{cof.}\, \theta = \frac{v - n}{\sqrt{(nn - 1)}} \text{ et cof.}\, \eta = \frac{1 - nv}{v\sqrt{(nn - 1)}}, \text{ erit}$$

$$\text{fin.}\, \theta = \frac{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}{\sqrt{(nn - 1)}} \text{ et fin.}\, \eta = \frac{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}{v\sqrt{(nu - 1)}}.$$

Hinc iam cum ſit

$$\text{fin.}\, 2\Phi = \text{fin.}\, \eta\, \text{cof.}\, \theta - \text{cof.}\, \eta\, \text{fin.}\, \theta \text{ et}$$

$$\text{cof.}\, 2\Phi = \text{cof.}\, \eta\, \text{cof.}\, \theta + \text{fin.}\, \eta\, \text{fin.}\, \theta,$$

erit factis ſubſtitutionibus:

$$\text{fin.}\, 2\Phi = \frac{(v - 1)\sqrt{(2nv - vv - 1)}}{(n - 1)v} \text{ et}$$

$$\text{cof.}\, 2\Phi = \frac{(1 + n)v - vv - 1}{(n - 1)v},$$

atque hinc porro habebimus:

$$1 + \text{cof.}\, 2\Phi = 2\,\text{cof.}\, \Phi^2 = \frac{2nv - vv - 1}{(n - 1)v} \text{ et}$$

$$1 - \text{cof.}\, 2\Phi = 2\,\text{fin.}\, \Phi^2 = \frac{(v - 1)^2}{(n - 1)v}.$$

§. 13. Cum nunc ſit angulus CAM $= \Phi$ et AM $= z$, Tab. I.
ob $zz = bbv$, erit $v = \frac{zz}{bb}$; tum vero ducta applicata MX, Fig. 4.
ſi vocentur coordinatae AX $= x$ et XM $= y$, erit primo $zz = xx + yy$, tum vero fin. $\Phi = \frac{y}{z}$; vnde ſi iſti valores loco $\Phi$ et $v$ ſubſtituantur, nanciſcemur aequationem inter $x$ et $y$ pro curua quaeſita: $\frac{2yy}{zz} = \frac{(zz - bb)^2}{bb(n - 1)zz}$, ſiue reductione facta

*by*

$$b y \sqrt{(2 n - 2)} = z z - b b = x x + y y - b b,$$

quae manifeſto eſt pro circulo. Sumſimus autem

$$4 c c = (2 n + 2) b b,$$

ſicque erit $n = \frac{2 c c - b b}{b b}$, ideoque $n - 1 = \frac{2(c c - b b)}{b b}$. Porro autem poſueramus $c c - a a = b b$, ita vt ſit $c c = a a + b b$ et $n - 1 = \frac{2 a a}{b b}$, conſequenter $\sqrt{2 (n - 1)} = \frac{2 a}{b}$, vnde aequatio noſtra finalis pro curua quaeſita erit:

$$2 a y = x x + y y - b b,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$x x + (y - a)^2 = b b + a a.$$

§. 14. Ad hanc aequationem conſtruendam ex A ad
Tab. I. Fig. 6. axem C A erigatur perpendiculum $AI = a$, ductaque axi parallela I O erit $OM = y - a$ et $IO = x$, vnde ducta recta I M erit

$$IM^2 = x x + (y - a)^2 = a a + b b,$$

ideoque conſtans, et quidem pro lubitu accipienda, quia $bb$ eſt conſtans arbitraria. Vnde patet, curuam quaeſitam eſſe circulum, radio quocunque circa centrum I deſcriptum, exiſtente interuallo $AI = a$, quae ſola conditio hic eſt ſpectanda, vt ſit $AI = a$, propterea quod poſitio axis A C arbitrio noſtro relinquitur, id quod etiam calculus oſtenderet, ſi in vltima aequatione integrali $2 \Phi = \eta - \theta$ conſtantem adieciſſemus, quippe qua ratione vbique angulus M A C quantitate data fuiſſet auctus vel minutus, atque hinc diſcimus, praeter binas ſolutiones, quas nobis ſyntheſis exhibuit, nullas alias dari curuas quaeſito ſatisfacientes.

Alia

## Alia Solutio concinnior eiusdem problematis.

§. 15. Si quis immediate ex binis coordinatis $x$ et $y$ ſolutionem huius problematis tentare vellet, is in formulas prorſus inextricabiles incideret, in quibus non ſolum quadrata differentialium ſecundorum occurrerent, ſed etiam haec differentialia cum ipſis coordinatis ac differentialibus primis ita forent permixta, vt nullo modo ſolutio ſperari poſſet. Sequenti autem modo ſolutio multo elegantior quam praecedens obtineri poterit, ſi ſtatim ab initio amplitudo curuae rite in computum ducatur.

§. 16. Ducto igitur, per datum punctum A, axe fixo AB, radium oſculi MR ſecante in N; vocetur angulus $ANM = \phi$, qui amplitudinem arcus AM metietur, ſiquidem axis AB ad curuam in A fuerit normalis, quae tamen conditio ad ſolutionem non eſt neceſſaria. Vocetur porro interuallum $AN = u$, ac demiſſo ex A in radium oſculi MR perpendiculo AP, erit $AP = u \sin.\phi$ et $NP = u \cos.\phi$. Ponatur autem breuitatis gratia $AP = v = u \sin.\phi$. Eaedem denominationes porro transferantur in radium oſculi proximum $mr$; et quia angulus $Anm = \phi + \partial\phi$, erit angulus $MRm = \partial\phi$, pariter ac angulus $PAp$; vnde ſi recta $Ap$ ſecet radium oſculi MR in $q$, ob $Ap = v + \partial v$, erit $pq = \partial v$ et $Pq = v\partial\phi$. Hinc igitur primo erit $Rq = \frac{\partial v}{\partial\phi} = Rp$. Quodſi inſuper vocetur $MP = p$, vt ſit $mp = p + \partial p = Mq$, erit manifeſto $\partial p = v\partial\phi$, ideoque $p = \int v\partial\phi = MP$. Tab. I. Fig. 7.

§. 17. Cum nunc noſtrum problema poſtulet vt interuallum AR habeat magnitudinem conſtantem $= a$, triangulum rectangulum APR ſtatim nobis dat hanc aequationem:

$$aa = vv + \frac{\partial v^2}{\partial\phi^2},$$

vnde colligimus iſtam:

$$\partial \Phi \surd (a a - v v) = \partial v,$$

quae cum forma generali $M \partial V = 0$ comparata dat

$$M = \surd (a a - v v) \text{ et } \partial V = \partial \Phi - \frac{\partial v}{\surd (a a - v v)},$$

vnde manifeſto duplex ſolutio deducitur: Prior ſcilicet $M = 0$ dat $v = a$, poſterior vero $V = C$ praebet $\Phi - A \text{ ſin. } \frac{v}{a} = C$; neque iam difficile erit hinc ambas ſolutiones initio commemoratas deducere.

§. 18. Pro priore ſolutione, qua inuenimus $v = a$, erit interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = 0$, ita vt iam ipſa recta $MP$ futura ſit radius oſculi, cuius ergo quantitas erit

$$MP = \int v \partial \Phi = a \Phi.$$

Vnde patet, quia punctum P perpetuo eandem diſtantiam a puncto A ſeruat, ſcilicet $AP = a$, euolutam curuae quaeſitae eſſe circulum, centro A, radio $AP = a$ deſcriptum, atque ipſam rectam $MP = a \Phi$ aequari arcui huius circuli iam euoluto.

§. 19. Pro altera ſolutione, quae dedit $\Phi - A \text{ ſin. } \frac{v}{a} = C$, erit $\frac{v}{a} = \text{ſin.} (\Phi - C)$; vbi euidens eſt conſtantem C tuto negligi poſſe, propterea quod poſitio axis aſſumti AB ab arbitrio noſtro pendet, ita vt habeamus $v = a \text{ ſin. } \Phi$; vnde colligitur primo interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \text{ coſ. } \Phi$, deinde interuallum $MP = -a \text{ coſ.} \Phi + b$. Hinc ipſe radius oſculi concluditur $MR = b$, ideoque conſtans; vnde manifeſtum eſt curvam quaeſitam hoc caſu fore circulum, radio arbitrario $= b$ deſcriptum, pro cuius poſitione cum ſit $AP = v = u \text{ ſin. } \Phi = a \text{ ſin. } \Phi$, hinc fit $u = AN = a$, ita vt punctum N ſit fixum adeoque centrum circuli inuenti. Quia enim interuallum

lum $NP = a$ coſ.$\Phi$ et $MP = -a$ coſ.$\Phi + b$, erit ipſa recta $NM = b$, ideoque punctum R in N incidet.

§. 20. Sin autem conſtantem illam C praetermittere nolimus, ponamusque $C = \alpha$, habebimus $v = a$ ſin.$(\Phi - \alpha)$, hincque interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a$ coſ. $(\Phi - \alpha)$ et interuallum $MP = -a$ coſ. $(\Phi - \alpha) + b$, vnde ipſe radius oſculi prodit $MR = b$, vt ante. Quoniam porro erat $v = u$ ſin. $\Phi$, hinc colligitur $AN = u = \frac{a\,ſin.\,(\Phi - \alpha)}{ſin.\,\Phi}$, hincque porro

$$NP = u\ coſ.\,\Phi = \frac{a\,ſin.\,(\Phi - \alpha)\,.coſ.\,\Phi}{ſin.\,\Phi},$$

cui ſi addatur $MP = -a$ coſ. $(\Phi - \alpha) + b$, erit interuallum

$$NM = -\frac{a\,ſin.\,\alpha}{ſin.\,\Phi} + b.$$

Quoniam igitur inuenimus $MR = b$, erit $NR = \frac{a\,ſin.\,\alpha}{ſin.\,\Phi}$.

§. 21. Quo haec clariora euadant, ex R in axem AB ducatur normalis RS, et ob angulum $RNS = \Phi$, erit

$$RS = a\ ſin.\,\alpha \text{ et } NS = \frac{a\,ſin.\,\alpha\ coſ.\,\Phi}{ſin.\,\Phi};$$

ante vero inuenimus

$$AN = u = \frac{a\,ſin.\,(\Phi - \alpha)}{ſin.\,\Phi},$$

quibus coniunctis prodit interuallum

$$AS = \frac{a\,ſin.\,\alpha\ coſ.\,\Phi + a\,ſin.\,(\Phi - \alpha)}{ſin.\,\Phi}.$$

Quia vero

$$ſin.\,(\Phi - \alpha) = ſin.\,\Phi\ coſ.\,\alpha - coſ.\,\Phi\ ſin.\,\alpha,$$

erit hoc interuallum $AS = a$ coſ. $\alpha$; vnde patet punctum R eſſe fixum, eiusque diſtantiam $AR = a$, ſimulque angulum $SAR = \alpha$, quae ſolutio perfecte conuenit cum praecedente.

# Applicatio principii
## quo Illuſtris de la Grange geminas huiusmodi Problematum ſolutiones inter ſe conciliare eſt adortus.

§. 22. Quando ſolutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem: $M \partial V = 0$, ita vt factor finitus M non pro lubitu, ſed ex ipſa indole problematis acceſſerit; tum manifeſtum eſt tale problema admittere duas ſolutiones, alteram aequatione finita $M = 0$, alteram vero aequatione differentiali $\partial V = 0$ contentam. His igitur caſibus nulla plane ratio adeſt, cur prior harum ſolutionum in poſteriore inuoluta eſſe debeat, aeque parum ac ſi problema algebraicum ad aequationem pluribus factoribus conſtantem perducit, vbi ſinguli factores ſeorſim ſolutiones praebere ſolent nullo modo a ſe inuicem dependentes. Neque ergo his caſibus principium Ill. de la Grange in vſum vocari poterit.

§. 23. Plerumque autem vſu venire ſolet, vt factor ille finitus M non aperte in aequationem finalem ingrediatur, ſed demum, dum aequatio integrabilis redditur, in ſubſidium vocari ſolet, quo caſu vtique iſte factor arcto vinculo cum ipſa aequatione differentiali cohaeret. Veluti ſi peruentum fuerit ad huiusmodi aequationem differentialem: $p \partial x + q \partial y = 0$, quae ſponte integrationem non admmittat, ſed demum per formulam M diuiſa integrabilis euadat, tum iſtam aequationem hoc modo repraeſentari conueniet: $M . \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ita vt hic ſit $\partial V = \frac{p \partial x + q \partial y}{M}$, tum vtique duae habebuntur ſolutiones: altera finita $M = 0$, altera differentialis $\frac{p \partial x + q \partial y}{M} = 0$, ex qua integrando elicitur: $\int \frac{p \partial x + q \partial y}{M} =$ Conſt. Hoc ergo caſu prior ille factor M ab indole functionum $p$ et $q$ pendet, atque principium memoratum eum in finem excogitatum videtur,

detur, quemadmodum ex aequatione integrali:

$$\int \frac{p\,\partial x + q\,\partial y}{M} = C,$$

altera ſolutio finita $M = 0$ elici queat.

§. 24. Ad hoc praeſtandum vir Ill. iubet aequationem integratam, poſtquam certo modo in ordinem fuerit redacta, denuo differentiare, ita vt etiam conſtans per integrationem ingreſſa tanquam variabilis tractetur, quo pacto ad talem aequationem $P\,\partial x + Q\,\partial y + Q\,\partial C = 0$, peruenietur; tum vero coëfficientem ipſius $\partial C$ nihilo aequalem ſtatuit et ex aequatione $R = 0$ valorem ipſius conſtantis C per ambas variabiles $x$ et $y$ definit, atque affirmat, ſi iſte valor loco C in ipſa aequatione integrali ſubſtituatur, tum prodituram eſſe aequationem illam finitam $M = 0$, ſicque hanc aequationem finitam certo modo in aequatione integrali contineri eſſe cenſendam; quanquam equidem hanc concluſionem minus perſpicio, propterea quod ſi in aequatione integrata conſtans vt variabilis tractetur, haec aequatio non amplius pro integrali haberi poteſt.

§. 25. Applicemus autem hoc principium ad ſolutionem §. 5. inuentam: $\partial p \sqrt{(aa - tt)} - t\,\partial t = 0$, quae ad hanc formam:

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

reducta et integrata praebet $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$, vnde irrationalitatem tollendo prodit: $aa - tt = cc - 2cp + pp$, quae differentiata, ſpectando etiam $c$ vt variabile, praebet:

$$-2t\,\partial t = 2c\,\partial c - 2c\,\partial p - 2p\,\partial c + 2p\,\partial p,$$

vbi coëfficiens ipſius $\partial c$ eſt $2(c - p)$, qui nihilo aequatus dat $c = p$. Hic iam valor in aequatione integrata loco $c$, ſubſtitutus dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = p$, ſiue $\sqrt{(aa - tt)} = 0$, quae

 vtique

vtique eſt prior noſtra ſolutio ex factore finito concluſa, ſcilicet $t = a$. Quia autem naturae rei repugnat, conſtanti per integrationem ingreſſae $c$ valorem variabilem $p$ tribui, neutiquam video, quomodo dici queat, ſolutionem illam finitam $t = a$ in aequatione integrali contineri.

§. 26. Deinde etiam nullam rationem perſpicio, cur aequatio integralis, antequam conſtanti $c$ variabilitas tribuitur, ab irrationalitate liberari debeat. Si enim hoc principium immediate applicare vellemus, ipſamque aequationem integralem primo inuentam differentiare, coëfficiens ipſius $\partial c$ foret vnitas, vnde nihil plane ſequeretur. Praetermiſſa autem reductione ad rationalitatem hac ratione quicquid lubuerit concludi poſſet. Si enim aequatio integrata hac forma repraeſentetur:

$$p + q + \sqrt{(aa - tt)} = c + q,$$

ſumtisque vtrinque quadratis differentiatio inſtituatur, coëfficiens ipſius $\partial c$ erit $2(c + q)$, vnde deducitur $c = -q$, qui valor in ipſa aequatione integrali ſubſtitutus daret

$$p + \sqrt{(aa - tt)} = -q,$$

vbi $q$ denotare poſſet functionem quamcunque variabilium $p$ et $t$. Nemini autem in mentem venire poterit talem ſolutionem problematis admittere.

§. 27. Nullum autem eſt dubium, quia vir Ill. mentem ſuam non ſatis clare expoſuerit, aut quasdam rationes ad intelligendum neceſſarias reticuerit, quas equidem ſupplere non valeo, vnde vberior explicatio ſuper hoc nouo principio, in quo Ill. Auctor adeo inſigne ſupplementum vniuerſi Calculi integralis conſtituit, maxime foret optanda.

PRO-

# PROBLEMA GEOMETRICVM.
## OB SINGVLARIA SYMTOMATA IMPRIMIS MEMORABILE.

Auctore

*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die* 10 *Febr.* 1777.

§. 1.

Problema, quod hic tractandum ſuſcipio, et quod nobis plura phaenomena maxime notatu digna offeret, ita ſe habet:

## Problema.

*Circa punctum fixum C deſcribere lineam curuam A Z eius indolis, vt area ſectoris A C Z proportionalis ſit quadrato arcus A Z.* Tab. II. Fig. 1.

Scilicet ſi vocetur arcus A Z $= s$, area vero ſectoris A C Z $= \Sigma$, requiritur vt vbique $\Sigma : ss$ eandem teneat rationem, quam ita deſignemus, vt ſit $ss = 4n\Sigma$.

§. 2. Primo obſeruo huic problemati omnes ſpirales logarithmicas, circa centrum C deſcriptas, ſatisfacere. Sit enim $\zeta$ angulus, ſub quo omnes radii C Z ſpiralem ſecant, ita vt ſit angulus C Z A $= \zeta$, voceturque ipſe radius C Z $= z$, et ducto radio proximo C $z = z + \partial z$, centroque C arculo

lo $ZO$ erit elementum $Oz = \partial z$ et ob angulum $ZzO = \zeta$, erit $ZO = \partial z \text{ tang. } z$ et $Zz = \partial z \text{ ſec. } z = \frac{\partial z}{\text{coſ.} \zeta}$. Hinc ergo erit elementum arcus $\partial s = \frac{\partial z}{\text{coſ.} \zeta}$, ideoque $s = \frac{z}{\text{coſ.} \zeta}$, quae formula totam ſpiralis longitudinem ab ipſo centro C vsque ad Z protenſam denotat. Deinde ob $ZO = \partial z \text{ tang. } \zeta$, erit area trianguli $CZz = \frac{1}{2} z \partial z \text{ tang. } \zeta$, quod cum ſit differentiale areae $\Sigma$, erit integrando $\Sigma = \frac{1}{4} zz \text{ tang. } \zeta$, quae area iterum ab ipſo centro C eſt deſumta. Vi igitur noſtri problematis, cum eſſe debeat $ss = 4 n \Sigma$, his valoribus ſubſtitutis habebimus $\frac{zz}{\text{coſ.} \zeta^2} = n zz \text{ tang. } \zeta$, ſiue $1 = n \text{ ſin.} \zeta \text{ coſ.} \zeta$, ita vt hic ſit $n = \frac{1}{\text{ſin.} \zeta \text{ coſ.} \zeta}$, vnde patet his caſibus $n$ adeo binario maiorem eſſe debere, ſiquidem erit $n = \frac{2}{\text{ſin.} 2 \zeta}$. Hinc igitur, ſi detur numerus $n > 2$, duo anguli pro $\zeta$ dabuntur quaeſito ſatisfacientes. Cum enim ſit $\text{ſin.} 2 \zeta = \frac{2}{n}$, ſi fuerit $\text{ſin.} \alpha = \frac{2}{n}$, quoniam etiam eſt $\text{ſin.} (180° - \alpha) = \frac{2}{n}$, erit duplici modo vel $\zeta = \frac{1}{2} \alpha$, vel $\zeta = 90° - \frac{1}{2} \alpha$.

§. 3. Haec autem ſolutio hoc laborat incommodo: quod tam arcus quam area initium ab ipſo centro C capiant, a quo ſpirales demum poſt infinitos gyros vsque ad Z porriguntur. Deinde etiam haec ſolutio locum habere nequit, niſi numerus $n$ ſit binario maior, vnde haec ſolutio pro maxime particulari haberi debet, ſiquidem nullo modo locum habere poteſt, quando initium A, a quo tam arcus quam areae ſint computandae, extra centrum C ſitum proponitur, tum vero etiam pro $n$ numerus quicunque, ſiue maior, ſiue minor quam 2 praeſcribitur. Quamobrem operam dabimus, vt ſolutionem generalem problematis propoſiti eruamus; quod negotium triplici modo expedire licebit.

Prima

# Prima Solutio
## problematis propoſiti.

§. 4. Sit igitur vt ante arcus $AZ = s$ et area ſectoris $ACZ = \Sigma$, ita vt eſſe debeat $ss = 4n\Sigma$. Iam pro lubitu accipiatur axis $CB$, quem normalis ad curuam $ZR$ ſecet in puncto $N$; tum vero ex $C$ in iſtam normalem perpendiculariter ducatur recta $CP$, ac vocata diſtantia $CZ$, vt ante, $= z$, ponantur inſuper $CP = t$ et $ZP = p$, ita vt ſit $zz = pp + tt$, ductaque ad punctum proximum $z$ recta $Cz$, in eamque normali $ZO$, triangulum $ZzO$ ſimile erit triangulo $CZP$; vnde cum ſit $zO = \partial z$ et $Zz = \partial s$, habebitur iſta proportio: Tab. II. Fig. 2.

$$CZ : Zz = CP : zO = ZP : ZO,$$
$$z : \partial s = t : \partial z = p :$$

vnde primo colligitur $ZO = \frac{p \partial s}{z}$ et $t \partial s = z \partial z$. Hinc ex valore $ZO$ prodit elementum areae ſectoris:

$$CZz = \partial \Sigma = \tfrac{1}{2} p \partial s,$$

ideoque $\Sigma = \tfrac{1}{2} \int p \partial s$. Quare cum eſſe debeat $ss = 4n\Sigma$, erit differentiando:

$$s \partial s = 2n \partial \Sigma = np \partial s,$$

vnde colligitur $s = np$. Hinc inſignis proprietas curuae quaeſitae ſtatim innoteſcit, qua arcus curuae $AZ$ ſe ſemper habet ad rectam $ZP = p$ in ratione data, ſcilicet vt $n : 1$.

§. 5. Ducatur iam ex puncto $z$ pariter normalis ad curuam $zR$ priori in $R$ occurrens, eritque $ZR$ radius oſculi curuae quaeſitae, quem nominemus $= r$. In hanc porro normalem $zR$ ex centro $C$ demittatur quoque perpendiculum $Cp = t + \partial t$, priorem ſecans in $\pi$, et cum iam ſit $zp = p + \partial p$, erit quoque $Z\pi = p + \partial p$, vnde colligitur $P\pi = \partial p$ et

$\pi p = \partial t$, ob omnes angulos rectos. Hinc quoque patet, ſore angulum Z R $z$ aequalem P C $\pi$; vnde ſequitur triangulum P C $\pi$ ∾ triang. Z R $z$, hincque colligitur $\partial p : t = \partial s : r$, ergo $r = \frac{t \partial s}{\partial p}$. Supra autem vidimus eſſe $s = n p$, ideoque $\partial s = n \partial p$, quo valore loco $\partial s$ ſubſtituto erit $r = n t$, quae eſt altera inſignis proprietas huius curuae, ſcilicet vt eius radius oſculi vbique ad rectam O P $= t$ datam teneat rationem, vt $n : 1$; vnde patet in hac curua vbique eſſe arcum A Z $= s$ ad radium oſculi ZR$= r$ vti Z P : C P.

§. 6. Vocemus iam angulum C N Z $= \Phi$, qui angulus amplitudinem curuae metitur, et cum ſit $C \pi z = \Phi + \partial \Phi$, erit angulus Z R $z = \partial \Phi =$ P C $\pi$, vnde fit $P \pi = t \partial \Phi = \partial p$, ideoque $p = \int t \partial \Phi$. Porro quia $\pi p = \partial t$, erit

$$R p = \frac{\partial t}{\partial \Phi} = P R,$$

vnde componitur radius oſculi

$$r = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi.$$

Quare cum eſſe debeat $r = n t$, habebimus iſtam aequationem, duas tantum variabiles continentem: $n t = \frac{\partial t}{\partial \Phi} + \int t \partial \Phi$, qua tota ſolutio problematis noſtri continetur; ex qua ergo quantitatem $t$ per angulum $\Phi$ inueſtigari oportet. Inuenta autem hoc modo recta $t$, vltro ſe offert formula integralis:

$$\int t \partial \Phi = n t - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = p.$$

§. 7. Vt nunc aequationem inuentam a ſigno integrali liberemus, ea differentiata, ſumto elemento $\partial \Phi$ conſtante, dabit hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$n \partial t = \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi} + t \partial \Phi, \text{ ſiue}$$

$$t - \frac{n \partial t}{\partial \Phi} + \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = 0,$$

quae forma ita eſt comparata, vt ei certo ſatisfaciat huiusmo-

di

di valor: $t = A e^{\alpha \Phi}$; hinc enim fit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} \text{ et } \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = A \alpha \alpha e^{\alpha \Phi},$$

quibus ſubſtitutis erit $1 - n\alpha + \alpha\alpha = 0$, ita vt $\alpha$ debeat eſſe radix iſtius aequationis quadraticae; vnde duplici modo fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)},$$

hinc ſi altera radix indicetur per $\beta$, etiam ſatisfaciet formula $t = B e^{\beta \Phi}$. Manifeſtum autem eſt aequationi inuentae etiam ſatisfacturum eſſe valorem ex his duobus compoſitum, ſcilicet $t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}$, vbi litterae A et B ſunt binae conſtantes per duplicem integrationem ingreſſae; vnde patet, hanc aequationem continere integrale completum.

§. 8. Quodſi ergo propoſitus fuerit numerus $n$, vt fiat $s s = 4 n \Sigma$, ex eo quaerantur ambo numeri $\alpha$ et $\beta$, ita vt ſit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n + \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)} \text{ et } \beta = \tfrac{1}{2} n - \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)},$$

ideoque $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \beta = 1$, qui ergo erunt ambo reales, quando fuerit $n > 2$; contra vero imaginarii, quando $n < 2$; caſu autem $n = 2$, ambo hi valores erunt inter ſe aequales, vterque ſcilicet $= 1$. Accommodemus autem ſolutionem noſtram ad primum caſum, quo $n > 2$, quandoquidem hinc bini reliqui caſus facile deriuari poterunt. Cum igitur habeamus

$$t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi},$$

hinc ſtatim innoteſcit radius oſculi curuae:

$$r = n t = n (A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}).$$

Deinde cum ſit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} + B \beta e^{\beta \Phi}, \text{ erit}$$

$$\int t \partial \Phi = n t - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = \beta A e^{\alpha \Phi} + \alpha B e^{\beta \Phi} = p;$$

ex quo ſtatim patet, quia erat $s = n p$, fore ipſum arcum curvae

$$AZ = s = n(\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi}),$$

vnde porro concluditur area ſectoris $\Sigma = \frac{ss}{4n}$, hoc eſt

$$\Sigma = \frac{n}{4}(\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi})^2.$$

Denique cum ſit $zz = pp + tt$, erit

$$zz = A^2 e^{2\alpha\Phi}(1 + \beta\beta) + B^2 e^{2\beta\Phi}(1 + \alpha\alpha) + 2AB e^{\alpha\Phi + \beta\Phi}(1 + \alpha\beta).$$

Quia autem $1 + \alpha\alpha = \alpha n$, $1 + \beta\beta = \beta n$ et $\alpha\beta = 1$, habebitur:

$$zz = \beta n A^2 e^{2\alpha\Phi} + \alpha n B^2 e^{2\beta\Phi} + 4AB e^{\alpha\Phi + \beta\Phi},$$

§. 9. Quoniam conſtantes A et B ab arbitrio noſtro pendent, eas ita ſumamus, vt poſito $\Phi = 0$ ipſe arcus curvae AZ euaneſcat, hocque modo punctum Z in ipſum initium A incidat; poſito autem $\Phi = 0$ fit $s = n(\beta A + \alpha B)$, ideoque ſtatui oportet $\beta A = -\alpha B$. Quamobrem ſumamus $A = C\alpha$ et $B = -C\beta$, quo facto nanciſcimur hos valores:

$$t = C(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}) \text{ et } p = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

ex quibus porro habebimus:

$$s = nC(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) \text{ et } r = nC(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}).$$

§. 10. Quo nunc ad coordinatas orthogonales calculum redigamus, quas ponamus $CX = x$ et $ZX = y$, vocemus tantiſper interuallum $CN = u$, vt fiat $CP = t = u \sin.\Phi$ et $NP = u \cos.\Phi$, et quia $u = \frac{t}{\sin.\Phi}$, erit $NP = t \cot.\Phi$, hincque tota Normalis $ZN = p + t \cot.\Phi$, quam breuitatis gratia deſignemus per $v$, ita vt ſit

$$v = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) + C \cot.\Phi(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}), \text{ ſiue}$$

$$v = C e^{\alpha\Phi}(1 + \alpha \cot.\Phi) - C e^{\beta\Phi}(1 + \beta \cot.\Phi).$$

Hinc iam primo deducimus applicatam $XZ = y = v \sin.\Phi$, ſiue

ſiue $y = p$ ſin. $\Phi + t$ coſ. $\Phi$. Pro abſciſſa vero erit $CX = x$ $= u - v$ coſ. $\Phi$, ideoque

$$x = t \text{ ſin.}\, \Phi - p \text{ coſ.}\, \Phi.$$

Hinc ambe coordinatae $x$ et $y$ ſequenti modo per angulum $\Phi$ exprimentur:

$$x = C e^{\alpha \Phi} (\alpha \text{ ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi) - C e^{\beta \Phi} (\beta \text{ ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$y = C e^{\alpha \Phi} (\text{ſin.}\,\Phi + \alpha \text{ coſ.}\,\Phi) - C e^{\beta \Phi} (\text{ſin.}\,\Phi + \beta \text{ coſ.}\,\Phi).$$

Pro initio igitur, vbi $\Phi = 0$, ſiue pro puncto A, erit $x = 0$ et $y = C(\alpha - \beta)$; vnde patet punctum A puncto C perpendiculariter imminere, exiſtente interuallo $CA = C(\alpha - \beta)$; vnde ſi ſtatuamus hanc altitudinem $CA = a$, erit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$.

§. 11. Poſito igitur pro curuae initio A interuallo $CA = a$, vt ſit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$, conſideremus reliqua ſymptomata curuae in hoc loco. Ac primo quidem, cum ſit $s = 0$, erit quoque $p = 0$, ideoque recta CA tanget curuam in puncto A. Deinde pro hoc loco erit $t = a$; vnde cum ſit radius oſculi $r = n t$, in ipſo initio A erit radius oſculi curuae $= n a$. Ante autem vidimus pro hoc puncto eſſe $x = 0$ et $y = a$, haecque ſymptomata ſemper locum habent, ſiue numerus $n$ fuerit maior, ſiue minor quam Q; reliqua vero ſymptomata huius curuae plurimum pendent ab hoc valore, atque adeo maxime variantur, provti fuerit vel $n > 2$, vel $n = 2$, vel $n < 2$, quos ergo caſus ſeorſim perpendamus.

## Euolutio caſus primi,
### quo $n > 2$.

§. 12. Hic igitur ambae litterae $\alpha$ et $\beta$ reales habebunt valores, eosque poſitiuos, ergo poſito $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$ primo

mo habebimus:

$$Cp = t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}),$$

vbi erit $\alpha - \beta = \sqrt{(nn-4)}$, hincque radius oſculi $ZR = nt = r$. Pro initio autem modo vidimus eſſe $t = a$ et $r = na$. Quodſi iam angulus $\Phi$ continuo augeatur, euidens eſt hanc quantitatem $t$, ideoque etiam radium oſculi $r$ continuo creſcere, atque adeo in infinitum, quando angulus $\Phi$ in infinitum augetur; vnde patet hanc curuam per infinitos gyros continuo maiores circa C reuolui, quod etiam elucet ex valore

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

vnde fit $s = np$. Quoniam enim aucto angulo $\Phi$ arcus $s$ continuo increſcit, etiam interuallum ZP continuo augetur, atque adeo in infinitum vsque.

§. 13. Perpendamus autem etiam continuationem curvae in alteram partem vltra A, cui reſpondebunt anguli $\Phi$ negatiue ſumti, et quoniam valor ipſius $t$ in ipſo puncto A erat $t = a$, curuam retro continuando huius lineae quantitas decreſcet, atque adeo alicubi euaneſcet, vbi ſcilicet erit $\alpha e^{\alpha\Phi} = \beta e^{\beta\Phi}$, vnde ſequitur $\Phi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\beta}{\alpha}$. Quia autem $l\beta = -l\alpha$, erit

$$\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-2l\alpha}{\sqrt{(nn-4)}},$$

qui ergo valor ipſius $\Phi$ eſt negatiuus, ob $\alpha > \frac{1}{2}n$. Pro hoc porro puncto, vbi $t = 0$, manifeſto radius CZ in curuam erit normalis, ſimulque radius oſculi erit $= 0$. At vero pro eodem loco, vbi $\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta}$, erit

$$e^{\alpha\Phi} = \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} \text{ et } e^{\beta\Phi} = \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}},$$

hincque colligitur fore:

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}\left(\alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} - \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}}\right) = \frac{a}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}}(1 - \alpha\alpha),$$

qui

qui ergo valor, ob $\alpha > 1$, eſt negatiuus, id quod neceſſe eſt, cum ſit $p = \frac{s}{n}$, atque hoc caſu arcus curuae $s$ negatiue accipiatur. Quod quo clarius appareat, ſit iſte arcus retro continuatus, in eoque E punctum, vbi $t = 0$, ideoque radius CE ad curuam normalis $= p$, ita vt ſit ipſe arcus $AE = np = nCE$. In ipſo autem hoc puncto E, quia radius oſculi euaneſcit, ſatis tuto concludere licet curuam habere cuſpidem, vnde in partem contrariam reflectatur. Tum vero pro ſitu huius puncti E cognoſcendo notetur eſſe angulum $BCE = -\Phi$, ita vt habeamus angulum $BCE = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn-4)}}$, ſicque hoc punctum E innoteſcit. Sin autem hunc angulum $\Phi$ negatiuum vltra iſtum terminum E augere velimus, quoniam, poſito $\Phi = -\infty$, tam $p$ quam $s$ iterum euaneſcunt, patet arcum AE non vltra terminum E progredi, ſed in E neceſſario reflecti debere, eiusque valorem in contrarium ſenſum conuerti; atque haud difficulter intelligitur, noſtrae curvae portionem vltra hunc terminum E in ſpiralem eſſe abituram, poſt infinitos gyros in ipſo centro C terminandam. Quia enim, ſumto $\Phi = \infty$, etiam arcus $s$ euaneſcit, ſequitur arcum ab E vsque ad centrum C porrectum praeciſe aequalem eſſe futurum arcui AE. Tab. II. Fig. 3.

§. 14. Haec autem omnia clariora reddentur, ſi praeter elementa hactenus vſurpata inſuper in computum introducamus angulum, quem curua in ſingulis punctis Z cum radio vectore CZ conſtituit. Ponamus igitur hunc angulum $CZA = \theta$, qui cum ſit aequalis angulo ZCP, erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{p}{t} = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}};$$

tum vero quia angulus $ACP =$ ang. $CNZ = \Phi$, qui metitur amplitudinem arcus AZ, erit angulus $ACZ = \Phi - \theta$; vnde

vnde patet, tranſlato puncto Z in A, ſeu ſumto $\Phi = 0$, fore angulum $\theta = 0$, vnde manifeſto fit pro hoc caſu $CZA = 0$.

§. 15. Progrediamur nunc ab initio A per Z continuo vlterius in infinitum, et quia $\alpha > \beta$, euidens eſt angulum $AZC = \theta$ paulatim fieri continuo maiorem; ſtatim enim ab initio, vbi $\Phi$ adhuc valde paruum, ob $e^{\alpha\Phi} = 1 + \alpha\Phi$ et $e^{\beta\Phi} = 1 + \beta\Phi$ erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{\Phi(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta) + (\alpha\alpha - \beta\beta)\Phi} = \frac{\Phi}{1 + (\alpha + \beta)\Phi},$$

ſeu proxime $\theta = \Phi$. Vnde patet, quo longius progrediamur, iſtum angulum increſcere, neque vero vltra certum terminum augeri poſſe. Si enim amplitudo $\Phi$ ſtatuatur infinita, ita vt curua iam per infinitos gyros a centro C receſſerit, quia $\alpha > \beta$, terminus $e^{\beta\Phi}$ prae $e^{\alpha\Phi}$ euaneſcet, ſicque tandem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\alpha} = \beta$. Quare cum $\alpha\beta = 1$ et $\alpha > \beta$, ſemper erit $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, ideoque tang. $\theta < 1$; vnde patet limitem iſtum, ad quem angulus $\theta$ continuo magis propinquat, minorem eſſe quam 45°, ſicque iſta curua, poſtquam plures gyros perfecerit, tandem confundetur cum ſpirali logarithmica, quae a radiis ſecatur ſub angulo, cuius tangens $= \beta$.

§. 16. Egrediamur nunc ab initio A continuo propius ad centrum C, quo caſu amplitudo euadet negatiua. Statuamus igitur $\Phi = -\psi$, ita vt $\psi$ ſit amplitudo ab initio A retrorſum continuata, eritque

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi}},$$

vnde dum angulus $\psi$ exiſtit quam minimus, erit

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{\psi(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = -\psi,$$

ita vt hic ſit $\theta = -\psi$, quo indicatur, iſtum angulum in partem

tem contrariam conuerti, et continuo fieri maiorem. Mox autem iſte angulus $\theta$ inſignia capiet incrementa, atque adeo vsque ad angulum rectum increſcet, quod fit vbi tang. $\theta$ euadet infinita, ſiue vbi fit denominator $\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi} = 0$; tum igitur erit ſumtis logarithmis $l\alpha + \beta\psi = l\beta + \alpha\psi$, vnde colligitur amplitudo:

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta},$$

ſiue $\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}}$. Ponamus nunc hoc euenire in puncto E, ita vt radius CE hic ad curuam ſit normalis, et quia $\theta = -90°$, ob $\Phi = -\psi$, erit angulus $ACE = 90° - \psi$, ſicque $\psi$ dabit angulum BCE. Quoniam vero hic eſt $t = 0$ et ipſa diſtantia $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit haec diſtantia:

$$CE = p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{-\alpha\psi} - e^{-\beta\psi}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{e^{n\psi}}.$$

Cum igitur ſit

$$\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta}, \text{ erit}$$

$$e^{\alpha\psi} = \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha - \beta}}; \quad e^{\beta\psi} = \alpha^{\frac{2\beta}{\alpha - \beta}} \text{ et}$$

$$e^{(\alpha + \beta)\psi} = \alpha^{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}}.$$

Vbi ſignum negatiuum tantum lineam $p$ afficit, ipſa enim diſtantia $z$ ſemper eſt poſitiua.

§. 17. Nunc a puncto modo inuento E, vbi $\theta = -90°$, vlterius retro progrediamur, augendo ſcilicet amplitudinem $\psi$ vltra terminum inuentum, atque denominator fractionis pro tang. $\theta$ inuentus euadet negatiuus, ſicque angulus $\theta$, qui hactenus fuerat negatiuus, hic ſubito ſignum mutabit, et curua ex puncto E in plagam contrariam inflectetur, ita vt in E cuſpidem formauerit, et quo longius progrediamur, tang. $\theta$

continuo magis diminuetur, neque tamen vltra certum terminum, quem cognoſcemus ſtatuendo amplitudinem $\psi = \infty$; tum autem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\beta} = \alpha$. Poſtquam igitur curua infinitos gyros continuo minores peregerit, tandem cum ſpirali logarithmica conueniet, cum radiis angulum faciente, cuius tangens $= \alpha$, ideoque maior vnitate, ſicque iſte angulus ſemper maior erit ſemirecto. Per ſe autem perſpicuum eſt diſtantias $z$ continuo magis imminui, atque adeo euaneſcere ob $e^{-\alpha\psi} = 0$ et $e^{-\beta\psi} = 0$.

## Euolutio caſus ſecundi,
### quo $n = 2$.

§. 18. Hunc caſum facile ex praecedente deriuabimus, ponendo $\alpha = \beta = 1$. Quoniam autem hoc caſu in ſuperioribus formulis tam numeratores quam denominatores euaneſcerent, ſtatuemus inter $\alpha$ et $\beta$ infinite paruam differentiam, ponamusque $\alpha = 1 + \omega$ et $\beta = 1 - \omega$, ſicque erit $\alpha - \beta = 2\omega$; praeterea vero

$$e^{\alpha\Phi} = e^{(1+\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 + \omega\Phi) \text{ et}$$
$$e^{\beta\Phi} = e^{(1-\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 - \omega\Phi).$$

His autem valoribus ſubſtitutis vbique tam numeratorem quam denominatorem per $\omega$ diuidere licebit, ita vt hoc pacto littera infinite parua introducta $\omega$ ex calculo excedat.

§. 19. Hoc igitur modo ſingulas formulas percurramus, ac primo quidem reperiemus $ZP = p = a\Phi e^{\Phi}$; hinc quia erat arcus $AZ = s = np$, hoc caſu habebimus arcum $AZ = 2a\Phi e^{\Phi}$. Deinde prodibit ſimili modo interuallum $ZP = t = a(1 + \Phi)e^{\Phi}$, vnde ſimul radius oſculi innoteſcet, ſcilicet $r = nt = 2a(1 + \Phi)e^{\Phi}$. Ex his autem coniunctis colligitur tang. $\theta = \frac{p}{t} = \frac{\Phi}{1+\Phi}$, tum vero hinc etiam facile definiri poterit ipſa diſtantia:

$$C Z = a e^{\Phi} \sqrt{(1 + 2 \Phi + 2 \Phi \Phi)}.$$

Denique hic manet vt ante angulus $A C Z = \Phi - \theta$.

§. 20. Incipiamus hic quoque a puncto A, vbi $\Phi = 0$, ideoque $p = 0$ et $s = 0$, tum vero $t = a$, $r = 2a$ et angulus $\theta = 0$. Hinc autem, amplitudinem $\Phi$ progrediendo continuo magis augeamus, atque etiam angulus $\theta$ continuo magis increſcet, attamen nunquam certum terminum excedet; poſito enim $\Phi = \infty$, erit tang. $\theta = 1$, ideoque $\theta = 45°$, ſicque iſta curua in infinito confundetur cum ſpirali logarithmica ſemirectangula; multo tamen magis diuerget, quandoquidem pro ſpirali foret $z = a e^{\Phi}$; vnde patet hic diſtantias $z$ eſſe infinities maiores pro paribus amplitudinibus. Ex quo perſpicuum eſt hanc curuam prorſus vt caſu praecedenti per ſpiras infinitas continuo longius a centro C recedere.

§. 21. Conſideremus nunc etiam iſtam curuam retro continuatam, ac ponamus $\psi$ loco $-\Phi$. Cum igitur ſit $z = \frac{a}{e^{\psi}} \sqrt{(1 - 2 \psi + 2 \psi \psi)}$, euidens eſt aucta amplitudine $\psi$ denominatorem $e^{\psi}$ multo magis increſcere quam numeratorem; vnde diſtantiae continuo euadent minores, et mox fere euaneſcent. Deinde cum iam ipſe arcus negatiue ſumtus ſit $s = + \frac{2 a \psi}{\psi}$, quam diu amplitudo $\psi$ valde eſt parua, erit $s = \frac{2 a \psi}{1 + \psi}$; interim tamen, ſumto $\psi = \infty$, etiam iſte arcus iterum euaneſcit; ex quo perſpicuum eſt longitudinem arcus tantum vsque ad certum terminum augeri, eoque ſuperato rurſus imminui: Alicubi igitur maximum nanciſcetur valorem, quem differentiale huius formulae, nihilo aequatum, oſtendet, vnde reperitur $\psi = 1$, hoc eſt, vbi amplitudo aequatur ſinui toto, vnde iſte valor maximus reſpondet amplitudini:

$\psi = 57°, 17', 45''$,

 lon-

longitudo autem maxima huius arcus erit $= \frac{2a}{e}$, exiſtente $e = 2,71828$; tum vero, ob $\psi = 1$, erit diſtantia a centro $z = \frac{a}{e}$, angulus autem $\theta$ hoc loco euadet rectus, angulusque ad centrum $\Phi - \theta = 90° - \psi$, ideoque angulus

$$BCE = \psi = 57°, 17', 45';$$

vbi obſeruetur caſu praecedente, quo erat $n > 2$, angulum BCE ſemper fuiſſe minorem.

§. 22. Conſideremus nunc rurſus iſtam curuam ab A antrorſum continuatam, et cum vi problematis ſit $ss = 8\Sigma$, denotante $s$ arcum et $\Sigma$ aream ſectoris, ob $s = 2a\Phi e$, erit $\Sigma = \frac{1}{2}a^2\Phi^2 e^{2\Phi}$, ſicque omnes areae, a puncto fixo A ſumtae, quadratis arcuum ab eodem termino ſumtorum vtique ſunt proportionales; id quod etiam tenendum eſt de altera curuae portione a puncto A retrorſum verſus centrum C procedente, vbi pro loco cuſpidis E, quoniam inuenimus arcum $AE = \frac{2a}{e}$, erit area ſectoris $ACE = \frac{aa}{2ee}$. Quando autem vltra centrum C verſus E progredimur, arcus iterum diminuuntur, et etiam areae ſectorum iterum imminui ſunt cenſendae; propterea quod in plagam contrariam vergunt. At vbi vsque ad centrum C fuerit peruentum, tam longitudo arcus quam area euaneſcunt, id quod eueniet poſt infinitos gyros, qui tandem etiam cum ſpirali logarithmica ſemirectangula confundentur; propterea quod tang. $\theta = \frac{\psi 1}{\psi - 1}$, qui valor ſumto $\psi = \infty$ abit in vnitatem, fietque $\theta = 45°$; ſicque iſta curua ita eſt comparata, vt tam in infinitum a centro recedens, quam proxime ad centrum accedens cum tali ſpirali conueniat.

§. 23. Cum igitur, ſi viciſſim a centro C per infinitas ſpiras vsque ad punctum fixum A progrediamur, tota arcus

cus longitudo euaneſcat, ideoque etiam area deſcripta: non ſolum punctum fixum A problemati noſtro ſatisfaciet, ſed etiam ipſum centrum C, ita vt omnes areae a centro C computatae proportionales ſint quadratis arcuum ab eodem puncto C ſumtorum. Namque ſi vt ante arcus quicunque A Z vocetur $= s$ et area ſectoris A C Z $= \Sigma$, erit quoque totus arcus a centro C ad punctum indefinitum Z porrectus $= s$, eodemque modo area a centro C vsque ad Z ſumta $= \Sigma$, ſicque etiam pro centro C erit $ss = 8\Sigma$, quae obſeruatio etiam locum habet pro caſu primo, quo $n > 2$, vbi ergo proprietas praeſcripta non ſolum ad punctum A ſed etiam ad centrum C pertinere eſt cenſenda.

## Euolutio caſus tertii,
### quo $n < 2$.

§. 24. Quo iſtum caſum facilius in calculo tractari queamus, ſtatuamus $n = 2 \operatorname{coſ.} \gamma$, ſiquidem hoc modo omnes numeri binario minores exprimi poſſunt, et conditio praeſcripta nunc poſtulabit, vt ſit $ss = 8 \Sigma \operatorname{coſ.} \gamma$; tum autem ambae litterae $\alpha$ et $\beta$ nunc ita per imaginaria exprimentur, vt ſit

$$\alpha = \operatorname{coſ.} \gamma + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \gamma \text{ et } \beta = \operatorname{coſ.} \gamma - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \gamma.$$

Ponamus autem breuitatis gratia $\operatorname{coſ.} \gamma = \mu$ et $\operatorname{ſin.} \gamma = \nu$, vt ſit

$$\alpha = \mu + \nu \sqrt{-1} \text{ et } \beta = \mu - \nu \sqrt{-1},$$

ſicque erit $\alpha - \beta = 2 \nu \sqrt{-1}$.

§. 25. Euoluamus nunc ambas formulas exponentiales $e^{\alpha \Phi}$ et $e^{\beta \Phi}$, et quoniam ex computo Imaginariorum conſtat eſſe:

$$e^{\omega \sqrt{-1}} = \operatorname{coſ.} \omega + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \omega \text{ et}$$
$$e^{-\omega \sqrt{-1}} = \operatorname{coſ.} \omega - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \omega,$$

 habe-

habemus primo: $e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} \cdot e^{\nu\Phi\sqrt{-1}}$, vnde facta reductione erit:

$$e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\text{coſ.}\, \nu\Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \nu\Phi),$$

ſimilique modo erit

$$e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\text{coſ.}\, \nu\Phi - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \nu\Phi).$$

In formulis autem ſupra inuentis in caſu primo occurrit expreſſio $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}$, cuius ergo valor per iſtam reductionem euadit $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi} \cdot \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \nu\Phi$. Deinde quoque occurrit formula $\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}$, quae reducta dabit:

1°. $\alpha e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu\, \text{coſ.}\nu\Phi - \nu\, \text{ſin.}\nu\Phi + \mu\sqrt{-1}\, \text{ſin.}\nu\Phi + \nu\sqrt{-1}\, \text{coſ.}\nu\Phi)$,

2°. $\beta e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu\, \text{coſ.}\nu\Phi - \nu\, \text{ſin.}\nu\Phi - \mu\sqrt{-1}\, \text{ſin.}\nu\Phi - \nu\sqrt{-1}\, \text{coſ.}\nu\Phi)$,

vnde conficitur:

$$\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi}\sqrt{-1}\,(\mu\, \text{ſin.}\, \nu\Phi + \nu\, \text{coſ.}\, \nu\Phi).$$

§. 26. His iam factis reductionibus, ob

$$\alpha - \beta = 2\nu\sqrt{-1},$$

formulae in caſu primo inuentae ad caſum praeſentem accommodari poterunt. Primo enim, quia ſupra habuimus

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

pro caſu praeſente habebimus:

$$p = \frac{a\, e^{\mu\Phi}\, \text{ſin.}\, \nu\Phi}{\nu}, \text{ hinc porro}$$

$$s = \frac{2\mu\, a\, e^{\mu\Phi}\, \text{ſin.}\, \nu\Phi}{\nu}.$$

Deinde erat

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}),$$

vnde pro caſu praeſenti erit:

$$t = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \text{ ſin. } \nu \Phi + \nu \text{ coſ. } \nu \Phi),$$

vnde deductus eſt radius oſculi:

$$r = n t = \frac{2 \mu a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \text{ ſin. } \nu \Phi + \nu \text{ coſ. } \nu \Phi).$$

Praeterea conſiderauimus angulum ACT $= \theta$, vidimusque eſſe tang. $\theta = \frac{p}{t}$, quamobrem nunc habebimus:

$$\text{tang. } \theta = \frac{\text{ſin. } \nu \Phi}{\mu \text{ ſin. } \nu \Phi + \nu \text{ coſ. } \nu \Phi} = \frac{1}{\mu + \nu \text{ cot. } \nu \Phi}.$$

Inuento autem angulo $\theta$ oſtendimus eſſe angulum ACZ $= \Phi - \theta$. Denique poſita ipſa diſtantia CZ $= z$, quoniam erat $z = \surd (pp + tt)$, erit nunc

$$z = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} \surd [(\mu \mu + 1) \text{ ſin. } \nu \Phi^2 + 2 \mu \nu \text{ ſin. } \nu \Phi \text{ coſ. } \nu \Phi + \nu \nu \text{ coſ. } \nu \Phi^2],$$

quae expreſſio reducitur ad ſequentem:

$$z = \frac{a}{\nu} e^{\mu \Phi} \surd (1 + \mu \nu \text{ ſin. } 2 \nu \Phi - \mu \mu \text{ coſ. } 2 \nu \Phi).$$

§. 27. His praeparatis contemplemur attentius ſingula ſymptomata harum curuarum. Ac primo quidem ſumta amplitudine $\Phi = 0$, pro termino initiali A habebimus $p = 0$, ideoque etiam $s = 0$; tum vero erit $t = a$, ideoque radius oſculi in A $= 2 \mu a$; porro habebimus $z = t = a$, ita vt prodeat, vti aſſumſimus, interuallum CA $= a$, quae recta ſimul curvam in A tanget, ſiquidem fit tang. $\theta = 0$. Ab hoc autem termino A antrorſum progrediemur, dum amplitudinem $\Phi$ continuo augebimus; tum autem arcus $s$ non perpetuo creſcet, vt caſu primo, quoniam ſumto $\nu \Phi = \pi$ denuo fit $s = 0$, vnde interea valorem maximum acquiſiuerit neceſſe eſt, quem indicat haec aequatio differentialis:

$$\mu \text{ ſin. } \nu \Phi + \nu \text{ coſ. } \nu \Phi = 0,$$

iisdem caſibus nempe, quibus tam $t$, quam $r$ euaneſcunt; vnde in his locis angulus $\theta$ fiet rectus, ita vt radius CZ ibi

in

in curuam ſit normalis. Quoniam igitur vltra hunc terminum arcus $s$ iterum decreſcit, neceſſe eſt vt curua quaſi reflectatur et in partes contrarias vergat; ex quo patet, in omnibus his punctis curuam cuſpidibus eſſe praeditam atque adeo curvaturam infinitae paruam eſſe habituram. Talia autem puncta adeo infinita dabuntur, ex aequatione:

$$\mu \text{ ſin. } \nu \Phi + \nu \text{ coſ. } \nu \Phi = 0$$

definienda; vnde cum ſit $\mu = \text{coſ. } \gamma$ et $\nu = \text{ſin. } \gamma$, haec aequatio dabit:

$$\text{coſ. } \gamma \text{ ſin. } \nu \Phi + \text{ſin. } \gamma \text{ coſ. } \nu \Phi = 0,$$

ideoque $\text{ſin.} (\gamma + \nu \Phi) = 0$, quod manifeſto euenit infinitis caſibus, quibus eſt $\gamma + \nu \Phi$ vel $\pm \pi$, vel $\pm 2\pi$, vel $\pm 3\pi$, vel in genere $\pm i\pi$, vnde conſequimur pro his curuis amplitudinem $\Phi = \frac{\pm i\pi - \gamma}{\nu}$. Ex quo intelligitur, hanc curuam antrorſum progrediendo infinitas habituram eſſe cuſpides his amplitudinibus ordine reſpondentes:

$$1^\circ.\ \Phi = \frac{\pi - \gamma}{\nu},$$

$$2^\circ.\ \Phi = \frac{2\pi - \gamma}{\nu},$$

$$3^\circ.\ \Phi = \frac{3\pi - \gamma}{\nu},$$

$$4^\circ.\ \Phi = \frac{4\pi - \gamma}{\nu},$$

etc.

Pro his autem punctis longitudo arcus a termino A ſumta erit

$$1^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)} \text{ ſin. } (\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)},$$

$$2^\circ.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)} \text{ ſin.} (2\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}.$$

3°.

$$3°.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)} \text{ſin.}(3\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$$

$$4°.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)} \text{ſin.}(4\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$$

etc. etc.

§. 28. Iam obſeruauimus in omnibus his punctis fore $t = 0$, ideoque tang. $\theta = \infty$, id quod etiam noſtra formula indicat, quae ad hanc reduci poteſt: tang. $\theta = \frac{\text{ſin.}\, \nu \Phi}{\text{ſin.}\,(\gamma + \nu \Phi)}$. Hinc igitur quia angulus A C Z $= \Phi - \theta$, erit pro caſibus modo memoratis:

1°. Ang. A C Z $= \frac{\pi(2 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

2°. Ang. A C Z $= \frac{\pi(4 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

3°. Ang. A C Z $= \frac{\pi(6 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

4°. Ang. A C Z $= \frac{\pi(8 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

etc.

Succinctius autem horum angulorum complementa, ſiue anguli B C Z exprimentur, hoc ſcilicet modo:

1°. Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(1 - \nu)\pi}{\nu}$,

2°. Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(2 - \nu)\pi}{\nu}$,

3°. Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(3 - \nu)\pi}{\nu}$,

4°. Ang. B C Z $= \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(4 - \nu)\pi}{\nu}$,

Denique ipſae diſtantiae C Z $= z$, quia ob $t = 0$ eſt $z = p$, erunt pro iis locis:

1°. C Z $= a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)}$,

2°. C Z $= a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}$,

$$3^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$$
$$4^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$$
etc

§. 29. Eodem prorſus modo a termino A ad centrum C accedendo innumerabiles dabuntur cuſpides, quae reſpondebunt ſequentibus amplitudinibus negatiuis:

1°. $\Phi = \frac{-\gamma}{\nu}$, (quae puncto E ſupra conſiderato reſpondet),

2°. $\Phi = \frac{-\pi - \gamma}{\nu}$,

3°. $\Phi = \frac{-2\pi - \gamma}{\nu}$,

4°. $\Phi = \frac{-3\pi - \gamma}{\nu}$,

etc. etc.

quae puncta continuo propius ad centrum C accedent, et per infinitas ſpiras, cuſpidibus permixtas, tandem in centro C euaneſcent.

§. 30. Denique iſtae curuae a praecedentibus etiam in hoc diſcrepabunt, quod in infinitis locis longitudo arcus $s$ euaneſcat. Cum enim ſit $s = \frac{2\mu\, a\, e^{\mu\Phi}}{\nu}$ ſin. $\nu\Phi$, hoc euenit, vbi fuerit $\Phi$ vel $\frac{\pi}{\nu}$, vel $\frac{2\pi}{\nu}$, vel $\frac{3\pi}{\nu}$, etc. vel etiam negatiue $\Phi = \frac{-\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-2\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-3\pi}{\nu}$, etc. Quare cum in omnibus iſtis locis ſit longitudo arcus $s = 0$, ibidem quoque area $\Sigma$ euaneſcet, id quod etiam in ipſo centro C eueniet. Vnde concludimus praeter duo puncta A et C innumerabilia inſuper alia dari puncta eiusdem indolis, vt areae a quolibet eorum computatae pariter proportionales ſint quadratis arcuum ab iisdem punctis ſumtorum. Poſtremo hic non eſt praetereundum, in omnibus iſtis punctis curuam a radiis CZ tangi, veluti

veluti euenit in puncto A; et quoniam eſt $\theta = 0$, pro ſingulis erit etiam angulus ACZ $= \Phi$, ſcilicet ipſi amplitudini aequalis, ex quo forma harum curuarum haud difficulter colligi poteſt.

## Alia ſolutio problematis,
### ex radio vectore CZ $= z$ et angulo deſcripto ACZ $= \omega$, deriuata.

§. 31. Ex his binis variabilibus $z$ et $\omega$ primo area ACZ $= \Sigma$ ita exprimitur, vt ſit $\Sigma = \frac{1}{2}\int zz\partial\omega$; deinde vero pro arcu curuae AZ $= s$ habebimus:

$$s = \int\sqrt{(\partial z^2 + zz\partial\omega^2)},$$

quibus formulis inuentis noſtrum problema poſtulat vt ſit

$$ss = 4n\Sigma = 2n\int zz\partial\omega,$$

quae aequatio quo euolui queat, ſtatuamus $z\partial\omega = q\partial z$, vt ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, ſicque loco anguli $\omega$ nouam variabilem $q$ introducimus, eritque $\int zz\partial\omega = \int qz\partial z$; tum vero fiet

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz\partial\omega^2)} = \partial z\sqrt{(1+qq)}.$$

Differentiemus nunc noſtram aequationem, prodibitque $2s\partial s = 2nqz\partial z$, ideoque $s = \frac{nqz}{\sqrt{(1+qq)}}$, quae denuo differentiata praebet

$$\partial z\sqrt{(1+qq)} = \frac{nq\partial z}{\sqrt{(1+qq)}} + \frac{nz\partial q}{(1+qq)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ducta in $(1+qq)^{\frac{3}{2}}$ dat hanc aequationem rationalem:

$$\partial z(1+qq)^2 = nq\partial z(1+qq) + nz\partial q.$$

§. 32. Iſta aequatio porro inſigne hoc commodum praeſtat, vt binae variabiles a ſe inuicem ſeparari queant; inde

O 2 enim

enim deducitur $\frac{\partial z}{z} = \frac{+n\partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, vnde quantitas $z$ per $q$ definiri poterit. Tum autem, cum ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, erit

$$\partial\omega = \frac{nq\partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)},$$

ſicque etiam angulus $\omega$ per eandem variabilem $q$ determinabitur. His autem inuentis binae coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, ſponte ſe produnt, ac pariter per ſolam variabilem $q$ exprimentur: erit enim $x = z\,\text{ſin.}\,\omega$ et $y = z\,\text{coſ.}\,\omega$, id quod ad ſolutionem ſufficere poſſet. Verum hic maxime oſtendi conveniet, quomodo haec ſolutio cum praecedente conſentiat. Hunc in finem magis euoluamus formulas inuentas, ac quoniam denominator duobus conſtat factoribus, formula pro $\frac{\partial z}{z}$ inuenta diſcerpatur in has partes:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{q\partial q}{1+qq} + \frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq},$$

vnde integrando colligitur:

$$lz = l\surd(1+qq) + \int\frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq}.$$

Hic iam pro parte poſteriore ponamus denominatoris $1-nq+qq$ factores eſſe $(q-\alpha)(q-\beta)$, eritque $\alpha+\beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, quo facto reſoluetur fractio $\frac{n-q}{(q-\alpha)(q-\beta)}$, in has duas: $\frac{A}{q-\alpha} + \frac{B}{q-\beta}$, exiſtente $A = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{-\alpha}{\alpha-\beta}$, ſicque habebitur:

$$\int\frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq} = A\,l(q-\alpha) + B\,l(q-\beta),$$

conſequenter per meros logarithmos habebimus

$$lz = l\surd(1+qq) + \frac{\beta}{\alpha-\beta}l(q-\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}l(q-\beta),$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$z = \frac{a\surd(1+qq)(q-\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}},$$

quae ergo expreſſio adeo eſt algebraica, ſi modo litterae $\alpha$ et

$\beta$

$\beta$ ſint numeri rationales; ſin autem fiunt imaginarii, quod euenit quando $n < 2$, tum poſterior integratio ad arcus circulares reuocetur.

§. 33. Tractemus ſimili modo alteram formulam inventam $\partial\omega = \frac{n q \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, quae vt ſupra in duas partes diuellatur, ſcilicet:

$$\partial\omega = \frac{-\partial q}{1+qq} + \frac{\partial q}{1-nq+qq};$$

vbi pars prior praebet arcum circularem, cuius tangens $= q$; poſterior vero, vt ante, per logarithmos exprimetur, ſiquidem litterae $\alpha$ et $\beta$ fuerint reales. Hic autem plurimum notaſſe iuuabit, cum ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, $q$ fore tangentem anguli C Z A, quem in ſolutione praecedente littera $\theta$ deſignauimus, ita vt ſit $\int \frac{\partial q}{1+qq} = \theta$, vnde aequatio noſtra erit

$$\omega + \theta = \int \frac{\partial q}{1-nq+qq}.$$

Facile autem perſpicitur ſummam horum angulorum exhibere amplitudinem arcus A Z, quam ante vocauimus $= \Phi$, ita vt ſit $\theta + \omega = \Phi = \int \frac{\partial q}{1-nq+qq}$.

§. 34. Videamus igitur, vtrum hinc eandem relationem inter binos angulos $\theta$ et $\Phi$ elicere queamus, quam in ſuperiore ſolutione ſumus adepti, quae erat

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}}.$$

Cum igit ſit $q = \text{tang.}\,\theta$, erit $\partial q = \frac{\partial\theta}{\cos.\,\theta^2}$, quibus valoribus introductis erit

$$\Phi = \int \frac{\partial\theta}{1 - n\,\sin.\theta\,\cos.\theta} = \int \frac{2\partial\theta}{2 - n\,\sin.\,2\theta}.$$

Ad hanc conuenientiam oſtendendam retineamus in calculo litteram $q = \text{tang.}\,\theta$, vt ſit $\partial\Phi = \frac{\partial q}{1-nq+qq}$, atque denominatorem

torem per hos factores repraeſentemus: $(q-\alpha)(q-\beta)$, exiſtente $\alpha+\beta=n$ et $\alpha\beta=1$, eritque

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=\frac{1}{(q-\alpha)(q-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\beta)}.$$

Nunc igitur erit

$$(\alpha-\beta)\,\partial\Phi=\frac{\partial q}{q-\alpha}-\frac{\partial q}{q-\beta},$$

vnde integrando fit $(\alpha-\beta)\Phi=l\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, hincque ad numeros progrediendo erit $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, ex qua aequatione elicitur $q=\frac{\beta C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-\alpha}{C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-1}$.

§. 35. Haec porro formula ſupra et infra multiplicata per $e^{\beta\Phi}$ tranſit in hanc: $q=\frac{\beta C\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{C\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}$, vbi ſi capiatur $C=\frac{\alpha}{\beta}$, prodibit

$$q=\frac{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}=\frac{e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\beta\,e^{\beta\Phi}},$$

quae eſt ea ipſa expreſſio quam ante inuenimus. Quod autem conſtanti C hic ipſe valor $\frac{\alpha}{\beta}$ tribui debeat, ex prima aequatione inuenta $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$ colligitur, ad ipſum curvae initium A regrediendo, vbi quia recta C A curuam tangit, hic erit $\Phi=0$ et $\theta=0$, ideoque etiam $q=0$, vnde prodit $C=\frac{\alpha}{\beta}$, ſicque conformitas huius ſolutionis cum praecedente perfecte eſt euicta.

Solutio

## Solutio tertia eiusdem problematis, ex binis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$ immediate deducta.

§. 36. Cum igitur hic ſit area $CAZX = \int y \partial x$, area vero trianguli $CXZ = \frac{1}{2} xy$, erit area ſectoris Tab. II. Fig. 2.

$$ACZ = \Sigma = \tfrac{1}{2}\int (y \partial x - x \partial y).$$

Nunc autem porro ponamus $\partial y = p \partial x$, eritque

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\int \partial x (y - px),$$

hinc vero erit elementum curuae $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, quare cum problema noſtrum poſtulet vt ſit $ss = 4n\Sigma$, prima differentiatio ſtatim dat:

$$s\sqrt{(1+pp)} = n(y - px), \text{ ideoque}$$
$$s = \frac{n(y - px)}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

§. 37. Ante autem quam denuo differentiemus, ponamus $y = ux$, vnde, quia fit

$$\partial y = u \partial x + x \partial u = p \partial x,$$

habebimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{+\partial u}{p - u}$. Nunc igitur erit

$$y - px = -x(p - u),$$

at vero differentiando commode fit

$$\partial.(y - px) = -x \partial p.$$

His praeparatis differentiatio repetita dabit:

$$\partial x \sqrt{(1+pp)} = -\frac{nx\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{nx(p-u)p\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio ducta in $(1+pp)^{\frac{3}{2}}$ nobis largitur:

$$\partial x (1+pp)^2 = -nx\partial p(1+pp) + nx(p-u)p\partial p,$$

ex

ex qua ſtatim elicimus:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n\,\partial p\,(1+pu)}{(1+pp)^2}.$$

Cum igitur modo inuenerimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$, nunc habebimus aequationem differentialem primi gradus inter binas tantum variabiles $p$ et $u$, quae ita ſe habet:

$$\frac{\partial u}{p-u} = -\frac{n\,\partial p\,(1+pu)}{(1+pp)^2}, \text{ ſiue}$$

$$\partial u = -\frac{n\,\partial p\,(p-u)(1+pu)}{(1+pp)^2},$$

vbi autem ambae variabiles $p$ et $u$ tantopere inter ſe ſunt permixtae, vt vix vlla via patere videatur ad eam reſoluendam; at vero ſimplex ſubſtitutio totum negotium facile conficiet. Statuamus enim $u = \frac{p+q}{1+pq}$, tum enim ſtatim ſatis concinne prodibit:

$$p - u = \frac{q(pp+1)}{1+pq} \text{ et } 1 + pu = \frac{1+pp}{1+pq},$$

qua ergo ſubſtitutione denominator ille $(1+pp)^2$ feliciter tolletur, erit enim

$$\frac{(p-u)(1+pu)}{(1+pp)^2} = \frac{q}{(1+pq)^2}.$$

§. 38. Deinde vero differentiando reperiemus:

$$\partial u = \frac{\partial p\,(1+qq)}{(1+pq)^2} - \frac{\partial q\,(1+pp)}{(1+pq)^2},$$

quibus igitur valoribus aequatis, quia denominatores $(1+pq)^2$ vtrinque ſe pulcherrime deſtruunt, aequatio reſultans erit:

$$\partial p\,(1+qq) - \partial q\,(1+pp) = -nq\,\partial p,$$

vnde erit $\frac{\partial p}{1+pp} = \frac{\partial q}{1+nq+qq}$. Ponamus iam

$$1 + nq + qq = (q+\alpha)(q+\beta),$$

vt ſit $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, ac ſi ſtatuatur

$$\frac{1}{1+nq+qq} = \frac{A}{q+\alpha} + \frac{B}{q+\beta},$$

erit $A = \frac{-1}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{1}{\alpha-\beta}$, hincque integrando:

Ar.

$$\text{Arc. tang. } p = \frac{1}{\alpha - \beta} \, l \, \frac{q + \beta}{q + \alpha} + C.$$

Iam notetur $p$ eſſe Cotangentem anguli A Z X, qui metitur amplitudinem arcus A Z, quam ſupra poſuimus $= \Phi$, ita vt ſit $p = \cot. \Phi$, ideoque Arc. tang. $p = 90° - \Phi$, ſicque mutata conſtante erit

$$\Phi = l\, c + \frac{1}{\alpha - \beta} \, l \, \frac{q + \alpha}{q + \beta},$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} = \frac{q + \alpha}{q + \beta},$$

vnde colligimus:

$$q = \frac{\alpha - \beta\, C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{C\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - 1},$$

hinc autem porro, ob $p = \cot. \Phi$, elicitur valor

$$u = \frac{p - q}{1 + p\, q} = \frac{y}{x}.$$

In ipſo igitur initio, ſeu puncto A, debet eſſe $\Phi = 0$, ideoque $p = \infty$, atque etiam $u = \infty$; vnde perſpicuum eſt eſſe debere $q = 0$. In valore igitur pro $q$ inuento faciamus $\Phi = 0$, et quia eſſe debet $q = 0$, pro conſtante definienda habebimus: $C = \frac{\alpha}{\beta}$, ſicque nunc habemus determinate:

$$q = \frac{\alpha - \alpha\, e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - 1} = \frac{1 - e^{(\alpha - \beta)\Phi}}{\alpha\, e^{(\alpha - \beta)\Phi} - \beta}, \text{ ſiue}$$

$$q = \frac{e^{\beta\Phi} - e^{\alpha\Phi}}{\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}},$$

ex quo intelligitur per angulum, quem ſupra poſuimus $\theta$, fore $q = -\tang. \theta$.

§. 39. Quoniam igitur per $p$, ſiue per angulum $\Phi$, non ſolum $q$, ſed etiam $u$ expreſſum inuenimus, poſtrema formula euoluta dabit:

 $u =$

$$u = \frac{e^{\alpha\Phi}(1 + \alpha\,\mathrm{cot.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(1 + \beta\,\mathrm{cot.}\,\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha - \mathrm{cot.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta - \mathrm{cot.}\,\Phi)} = \frac{y}{x}.$$

Tantum igitur ſupereſt, vt aequatio $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$ integretur. Vtamur autem potius poſteriore aequatione:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n\,\partial p\,(1 + pu)}{(1 + pp)^2},$$

quae ob $1 + pu = \frac{1 + pp}{1 + pq}$ transmutatur in hanc:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-n\,\partial\Phi}{(1 + pp)(1 + pq)},$$

quae porro, ob $p = \mathrm{cot.}\,\Phi$, tranſit in hanc: $\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi}{1 + q\,\mathrm{cot.}\,\Phi}$. Nunc igitur loco $q$ ſcribatur valor inuentus, ac reperietur:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi\,(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha - \mathrm{cot.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta - \mathrm{cot.}\,\Phi)},\ \text{ſiue}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n\,\partial\Phi\,(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi)\,e^{\beta\Phi}(\beta\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi)}.$$

Haec autem formula nimis complicata videtur, quam vt eius integrationem exſpectare liceat; verum ſi denominatorem differentiemus, deprehendemus fore:

$$e^{\alpha\Phi}\,\partial\Phi\,(\alpha\alpha + 1)\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - e^{\beta\Phi}\,\partial\Phi\,(\beta\beta + 1)\,\mathrm{ſin.}\,\Phi.$$

Quia vero eſt $\alpha\alpha + 1 = n\alpha$ et $\beta\beta + 1 = n\beta$, iſtud differentiale erit:

$$n\alpha e^{\alpha\Phi}\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi - n\beta e^{\beta\Phi}\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi = n\,\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi\,(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}),$$

cui ipſe numerator praeciſe eſt aequalis, ex quo ſtatim adipiſcimur

$$l\,x = l\,[e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\mathrm{ſin.}\Phi - \mathrm{coſ.}\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta\,\mathrm{ſin.}\Phi - \mathrm{coſ.}\Phi)] + l\,a,$$

vnde concludimus

$$x = a\,e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi) - a\,e^{\beta\Phi}(\beta\,\mathrm{ſin.}\,\Phi - \mathrm{coſ.}\,\Phi).$$

Quodſi nunc fractionem pro $\frac{y}{x}$ inuentam ſupra et infra in ſin. $\Phi$ ducamus, habebimus:

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{\alpha\Phi}(\text{ſin.}\,\Phi + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\text{ſin.}\,\Phi + \beta\,\text{coſ.}\,\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta\,\text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi)},$$

ita vt denominator praebeat valorem ipſius $x$, hincque adeo ſponte ſe offert $y$; erit enim:

$$y = a\,e^{\alpha\Phi}(\text{ſin.}\,\Phi + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi) - a\,e^{\beta\Phi}(\text{ſin.}\,\Phi + \beta\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

§. 40. Ex his igitur manifeſtum eſt, etiam hanc poſtremam ſolutionem cum ea, quam primo inuenimus, ad amusſim conuenire, propterea quod §. 10. eaedem plane formulae pro coordinatis $x$ et $y$ ſunt exhibitae. Interim tamen haec tertia ſolutio multo difficiliores integrationes atque artificia multo magis abſtruſa poſtulauit, ob quam ipſam rationem iſta ſolutio imprimis notatu digna eſt viſa.

# DE CVRVIS HYPERBOLICIS QVAE INTRA SVAS ASSYMTOTAS SPATIVM FINITVM INCLVDVNT.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. die 13 Febr. 1777.*

1.

Tab. II. Fig. 4. Conſiderabo hic eiusmodi curuas hyperbolicas, quarum aſſymtotae inter ſe ſunt normales, quoniam, quae de his reperientur, omnia facile ad Hyperbolas obliquangulas accommodari poſſunt. Sit igitur $fYe$ eiusmodi Hyperbola, cuius aſſymtotae CF et CE ſint inter ſe normales, atque nobis hic eſt propoſitum eas huius generis curuas inueſtigare, quae vtrinque in infinitum continuatae intra ſuas aſſymtotas ſpatium finitum includant. Ad hoc igitur requiritur, vt, poſitis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$, formula integralis $\int y\partial x$ ita ſit comparata, vt a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = \infty$ extenſa, valorem finitum obtineat. Notum autem eſt, nullam talium curuarum aequatione binomia expreſſarum, veluti $x^m y^n = 1$, hac proprietate praeditam eſſe, ſed ſemper ſpatium ad alterutram aſſymtotam relatum infinite magnum prodire, atque adeo in Hyperbola conica vtrumque ſpatium euadere infinitum.

§. 2.

§. 2. Hic igitur potiſſimum contemplabor eiusmodi Hyperbolas, quarum aequationes inter coordinatas $x$ et $y$ ſunt trinomiales, cuiusmodi generatim haec eſt aequatio:

$$A x^{\alpha} y^{\beta} + B x^{\gamma} y^{\delta} = C,$$

vbi quidem omnes exponentes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, poſitiui, ſeu nihilo maiores eſſe debent, quia alioquin, poſito $x = 0$, applicata $y$ non fieret infinita, vel non euaneſceret poſito $x = \infty$. Praeterea etiam ad inſtitutum noſtrum requiritur, vt ambo coëfficientes A et B ſint poſitiui. Si enim alter foret negatiuus, curua non vniformi tractu intra aſſymtotas protenderetur, ſed alicubi extra eas euagaretur; vnde nihil impedit, quominus ſtatuamus $B = A$, atque adeo etiam $C = A$, ita vt habeamus $x^{\alpha} y^{\beta} + x^{\gamma} y^{\delta} = 1$. Quae enim ſymtomata pro his curuis fuerint inuenta, eadem facile transferentur ad caſus, quibus iſti coëfficientes ſunt inaequales.

§. 3. Inter has autem curuas imprimis notatu dignae ſunt eae, in quibus binas coordinatas $x$ et $y$ permutare inter ſe licet, id quod euenit quando $\gamma = \beta$ et $\delta = \alpha$, vt aequatio ſit $x^{\alpha} y^{\beta} + x^{\beta} y^{\alpha} = 1$. Hoc enim modo ambo rami huius curuae ad ſuas aſſymtotas pariter conuergent; ita vt ſi ſpatium ad alterutram aſſymtotam relatum fuerit vel finitum, vel infinitum, etiam alterum eandem legem ſequatur. Nunc igitur inueſtigari conueniet, quemadmodum ambo exponentes $\alpha$ et $\beta$ comparati eſſe debeant, vt valor formulae integralis $\int y \partial x$, a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extenſus, quantitati finitae aequalis euadat. Quoniam igitur iſtos exponentes $\alpha$ et $\beta$ tanquam incognitos ſpectamus, euidens eſt ex hac aequatione neque $y$ per $x$, neque $x$ per $y$ definiri poſſe.

§. 4. Interim tamen determinatio areae huius curuae facile ſuccedet, ſi nouam variabilem in calculum introducamus,

mus, per quam tam $x$ quam $y$ commode exprimere liceat, id quod ſuccedet, ſi ponamus $y = u x$, tum enim noſtra aequatio fiet: $(u^\alpha + u^\beta) + x^{\alpha+\beta} = 1$; vnde poſito br. gr. $\alpha + \beta = \lambda$, erit $x = \frac{1}{\sqrt[\lambda]{(u^\alpha + u^\beta)}}$, hincque $y = \frac{u}{\sqrt[\lambda]{(u^\alpha + u^\beta)}}$. Hic notetur abſciſſam $x$ euaneſcere caſu $u = \infty$, quo caſu ſimul $y$ in infinitum creſcere debet. Quia enim numerator $u$ ita exhiberi poteſt, vt ſit $u = \sqrt[\lambda]{u^\lambda} = \sqrt[\lambda]{u^{\alpha+\beta}}$, erit

$$y = \sqrt[\lambda]{\frac{u^{\alpha+\beta}}{u^\alpha + u^\beta}},$$

vbi, quia exponens ipſius $u$ in numeratore maior eſt quam in denominatore, neceſſe eſt vt poſito $u = \infty$ tota expreſſio euadat infinita; contra autem, ſumto $u = 0$, valor ipſius $x$ manifeſto fit infinitus; at ipſius $y = 0$, ob rationem modo allegatam. Hanc ob rem ſequentes integrationes a termino $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi oportebit.

§. 5. Hinc autem differentiando reperiemus:

$$\partial x = -\frac{\partial u (\alpha u^{\alpha-1} + \beta u^{\beta-1})}{\lambda (u^\alpha + u^\beta)^{1+\frac{1}{\lambda}}},$$

quae expreſſio ducta in $y$ dabit elementum areae:

$$y \partial x = -\frac{\partial u (\alpha u^\alpha + \beta u^\beta)}{\lambda (u^\alpha + u^\beta)^{1+\frac{2}{\lambda}}},$$

cuius integrale ab $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi debet. Quia autem hic poteſtates ipſius $u$ tam in numeratore quam in denominatore reperiuntur, hanc formulam vlterius reducere licet. Sumamus igitur eſſe $\beta > \alpha$, ac ponamus $\beta = \alpha + \varepsilon$, atque formula denominatoris ita referri poterit: $u^\alpha (1 + u^\varepsilon)$, ſicque

ſicque denominator erit

$$\lambda u^{\alpha + \frac{2\alpha}{\lambda}} (1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}.$$

Diuidamus igitur tam numeratorem quam denominatorem per $u^{\alpha + \frac{2\alpha}{\lambda}}$, et habebimus

$$y \partial x = - \frac{\partial u (\alpha u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} + \beta u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}})}{\lambda (1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}},$$

hinc igitur integrale noſtrum conſtat ex ſequentibus duobus membris:

$$\int y \partial x = - \frac{\alpha}{\lambda} \int \frac{u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}} - \frac{\beta}{\lambda} \int \frac{u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1 + u^{\varepsilon})^{1 + \frac{2}{\lambda}}}.$$

Quoniam vero neutra harum formularum, integrationem, in genere quidem, admittit, id tantum nobis inquirendum relinquitur: vtrum haec duo integralia a termino $u = \infty$ vsque ad terminum $u = 0$ extenſa, valores adipiſcantur finitos, an infinitos, ad quod diiudicandum ſequens Lemma praemitti oportet: *Iſta formula integralis*: $\int \frac{u^m \partial u}{(1 + u^n)^k}$, *a termino* $u = 0$ *vsque ad terminum* $u = \infty$ *extenſa, valorem habebit finitum, quoties fuerit* $m + 1 > 0$, *ſimulque* $m + 1 < k n$.

## Demonſtratio.

§. 6. Quaeramus primo tantum huius formulae valorem ab $u = 0$ vsque ad $u = 1$ extenſum, quem vocemus $= P$, atque vt integrale per ſeriem exhibeamus, quia eſt

$$\frac{1}{(1 + u^n)^k} = 1 - \frac{k}{1} . u^n + \frac{k(k+1)}{1.2} u^{2n} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} u^{3n} + \text{etc.}$$

erit

erit iſtud integrale in genere:

$$P = \frac{u^{m+1}}{m+1} - \frac{k}{1} \cdot \frac{u^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{k(k+1)}{1.2} \frac{u^{2n+m+1}}{2n+m+1} - \text{etc.}$$

qui valor vtique euaneſcit poſito $u = 0$, ſi modo fuerit $m + 1 > 0$, quae eſt conditio primo commemorata. Hinc igitur poſito $u = 1$ erit valor quem quaerimus:

$$P = \frac{1}{m+1} - \frac{k}{1(n+m+1)} + \frac{k(k+1)}{1.2(2n+m+1)} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3(3n+m+1)} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma, quoniam terminorum ſigna alternantur, certe eſt finita, ſicque littera P valorem habebit finitum.

§. 7. Huic valori igitur inſuper addere debemus eum qui ex integratione eiusdem formulae naſcitur, ſiquidem a termino $u = 1$ vsque ad terminum $u = \infty$ extendatur, quem valorem indicemus littera Q, ita vt ſit

$$Q = \int \frac{u^m \partial u}{(1+u^n)^k} \begin{bmatrix} \text{ab } u = 1 \\ \text{ad } u = \infty \end{bmatrix}.$$

Hunc in finem ſtatuamus $u = \frac{1}{v}$, et nunc termini integrationis erunt a $v = 1$ vsque ad $v = 0$. Facta autem ſubſtitutione formula noſtra euadet:

$$Q = -\int \frac{v^{kn-m-2} \partial v}{(v^n+1)^k} \begin{bmatrix} \text{a } v = 1 \\ \text{ad } v = 0 \end{bmatrix}.$$

Sin autem terminos integrationis permutemus, erit

$$Q = +\int \frac{v^{kn-m-2} \partial v}{(v^n+1)^k} \begin{bmatrix} \text{a } v = 0 \\ \text{ad } v = 1 \end{bmatrix}.$$

§. 8. Iam denominatorem vt ante in ſeriem reſoluamus, quae erit

$$1 - \frac{k}{1} v^n + \frac{k(k+1)}{1.2} v^{2n} - \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3} v^{3n} + \text{etc.}$$

quae ducta in $v^{nk-m-2} \partial v$ et integrata dabit:

$$\frac{v^{nk-m-1}}{nk-m-1} - \frac{k}{1} \cdot \frac{v^{nk+n-m-1}}{nk+n-m-1} + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{v^{nk+2n-m-1}}{nk+2n-m-1} - \text{etc.}$$

quae ſeries euaneſcit caſu $v = 0$, ſi modo fuerit $nk - m - 1 > 0$, hoc eſt $nk > m + 1$, quae eſt altera conditio praeſcripta. Statuatur $v = 1$, eritque

$$Q = \frac{1}{nk-m-1} - \frac{k}{1(nk+n-m-1)} + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2(nk+2n-m-1)} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei valor, quoniam ſigna terminorum alternantur, certe eſt finitus, conſequenter formulae propoſitae $\int \frac{u^m \partial u}{(1+u^n)^k}$, a termino $u = 0$ vsque ad $u = \infty$ extenſae, valor erit $= P + Q$, ideoque finitus, ſi modo fuerit tam $m + 1 > 0$, quam $m + 1 < kn$.

## Alia demonſtratio eiusdem Lemmatis.

§. 9. Statuamus $u^n = \frac{t^n}{1 - t^n}$ fietque $u = 0$, ſi $t = 0$; at fiet $u = \infty$, facto $t = 1$, ſicque termini integrationis nunc erunt a $t = 0$ ad $t = 1$. Tum autem erit $1 + u^n = \frac{1}{1 - t^n}$ et denominator $= \frac{t}{(1 - t^n)^k}$. Deinde vero ob $u = \frac{t}{\sqrt[n]{(1 - t^n)}}$, erit $u^m = \frac{t^m}{(1 - t^n)^{\frac{m}{n}}}$, denique $\partial u = \frac{\partial t}{(1 - t^n)^{2 + \frac{1}{n}}}$. His igitur valoribus ſubſtitutis formula integranda erit:

$$\int \frac{t^m \partial t}{(1 - t^n)^{\frac{m+1}{n} - k + 1}} \begin{bmatrix} \text{a} \quad t = 0 \\ \text{ad} \quad t = 1 \end{bmatrix}.$$

Hic primum obſeruaſſe iuuabit, vt integrale poſito $t = 0$ euaneſcere poſſit, requiri vt ſit $m + 1 > 0$. Deinde vero, quia

denominator euaneſcit poſito $t = 1$, ne etiam integrale hoc caſu in infinitum excreſcat, neceſſe eſt vt exponens denominatoris $\frac{m+1}{n} - k + 1$ ſit vnitate minor; vnde ſequitur conditio $m + 1 < k n$, quae ſunt eaedem conditiones in Lemmate allatae.

§. 10. Applicemus nunc hoc Lemma ad binas formulas integrales, ex quibus aream totam $\int y \partial x$ componi inuenimus, quod quo facilius fieri poſſit, immutemus quoque terminos integrationis, vt ſit:

$$\int y \partial x = \frac{\alpha}{\lambda} \int \frac{u^{-\frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\frac{2}{\lambda}}} + \frac{\beta}{\lambda} \int \frac{u^{\varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}} \partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\frac{2}{\lambda}}} \begin{bmatrix} \text{ab } u = 0 \\ \text{ad } u = \infty \end{bmatrix},$$

atque applicatio prioris partis ad noſtrum Lemma dabit $m = -\frac{2\alpha}{\lambda}$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \frac{2}{\lambda}$, vnde prior conditio $m + 1 > 0$ praebet $\lambda > 2\alpha$. Quia igitur eſt $\lambda = \alpha + \beta$, debet eſſe $\beta > \alpha$, quae conditio iam ſponte eſt adimpleta; altera vero conditio $m + 1 < n k$ pro noſtro caſu dat $\lambda - 2\alpha < (\lambda + 2)\varepsilon$, ideoque $\lambda + 1 > 0$, quod etiam vltro euenit, quoniam bini exponentes $\alpha$ et $\beta$ neceſſario ſunt poſitiui, vnde prior formula perpetuo habet valorem finitum, quicunque valores litteris $\alpha$ et $\beta$ tribuantur.

§. 11. Applicemus pari modo noſtrum Lemma ad alteram formulam, pro qua erit $m = \varepsilon - \frac{2\alpha}{\lambda}$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \frac{2}{\lambda}$; hinc prior conditio $m + 1 > 0$ multo magis ſponte adimpletur quam ante. At vero altera conditio $m + 1 < k n$ praebet $\lambda - 2\alpha < 2\varepsilon$; quia autem $\lambda - 2\alpha = \beta - \alpha = \varepsilon$, haec conditio pariter ſponte adimpletur, niſi ſit $\varepsilon = 0$, hoc eſt $\beta = \alpha$.

§. 12.

§. 12. Hinc igitur patet, omnes Hyperbolas in hac aequatione: $x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha = 1$, contentas intra ſuas aſſymtotas ſemper ſpatia finita includere, quicunque numeri poſitiui exponentibus $\alpha$ et $\beta$ tribuantur, ſolo caſu $\beta = \alpha$ excepto, quo aequatio noſtra abit in $2 x^\alpha y^\alpha = 1$, ideoque $x y =$ Conſt. quae aequatio eſt pro Hyperbola conica, cuius ſpatium vtique eſt infinitum, id quod eo magis eſt mirandum, quia in Hyperbolis binomialibus nulla plane noſtro ſcopo ſatisfacit.

§. 13. Hactenus in aequatione tractata omnes coëfficientes vnitati aequales aſſumſimus: facile autem apparet, demonſtrationem pari modo eſſe ſucceſſuram, ſi coëfficientes quicunque adiungantur, dummodo fuerint poſitiui, quandoquidem etiam Lemma ſupra allatum omnem vim retinet, etiamſi formula integralis hoc modo proponatur: $\int \frac{u^m \partial u}{(a + b u^n)^k}$. Hanc ob rem ſequens Theorema generalius in medium afferre licet.

## Theorema.

*Omnes curuae hyperbolicae in hac aequatione contentae:*

$$a x^\alpha y^\beta + b x^\beta y^\alpha = c,$$

*intra aſſymtotas ſuas ſpatium finitum includent,* 1°.) *ſi omnes coëfficientes* a, b, c, *fuerint poſitiui;* 2°.) *ſi exponentes* $\alpha$ *et* $\beta$ *fuerint pariter ambo poſitiui;* 3°.) *ſi fuerint inter ſe inaequales.*

§. 14. Iam enim obſeruauimus, ſi coëfficientium $a$ et $b$ alteruter euaneſcat, quo caſu aequatio fit binomialis, tum ſpatium inter has Hyperbolas et ſuas aſſymtotas incluſum ſemper eſſe infinite magnum. Deinde, ſi exponentes $\alpha$ et $\beta$ in-

 ter

ter ſe eſſent aequales, curua abiret in Hyperbolam conicam, ideoque etiam memoratum ſpatium haberet infinitum, ex quo intelligitur, quo magis hi exponentes $\alpha$ et $\beta$ a ratione aequalitatis recedant, eo minus eſſe futurum ſpatium inter curuas et aſſymtotas contentum. Porro etiam hoc ſpatium eo magis diminuetur, quo propius ambo coëfficientes *a* et *b* ad aequalitatem acceſſerint.

§. 15. Caſus autem iſte tractatus maxime eſt particularis reſpectu aequationis generalis ex tribus terminis conſtantis, quae eſt:

$$a\,x^{\alpha}\,y^{\beta} + b\,x^{\gamma}\,y^{\delta} = c,$$

quam autem aequationem non eodem modo, vti praecedentem, tractare licet. Interim tamen circa hanc aequationem generaliſſimam ſequens theorema rigoroſe demonſtrare licet.

## Theorema generale.

*Omnes curuae hyperbolicae in hac aequatione generali contentae:* $a\,x^{\alpha}\,y^{\beta} + b\,x^{\gamma}\,y^{\delta} = c$, *intra ſuas aſſymtotas ſpatium finitum includent ſub ſequentibus conditionibus:* 1°.) *ſi ſinguli coëfficientes* a, b, c, *fuerint poſitiui ſiue nihilo maiores;* 2°.) *ſi etiam omnes exponentes* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, *fuerint poſitiui, quandoquidem, ſi vnicus eſſet negatiuus, vel ſaltem nihilo aequalis, curuae ne quidem forent Hyperbolae;* 3°.) *requiritur vt harum duarum fractionum* $\frac{\alpha}{\beta}$ *et* $\frac{\gamma}{\delta}$, *altera ſit vnitate maior, altera vero minor; ſi enim vel ambae eſſent vnitate maiores vel ambae minores, vel altervtra ſaltem* $=1$, *tum ſpatium de quo loquimur, ſemper foret infinite magnum.*

## Demonſtratio.

§. 16. Quia coëfficientes *a*, *b*, *c* in iudicio circa infinitum vel finitum non in computum ingrediuntur, eorum loco

eo commoditatis gratia vnitatem ſcribamus. Deinde quia fractionum $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ altera debet eſſe vnitate maior, altera minor, vt huius conditionis rationem in calculum inferamus, ponamus eſſe $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ et $\frac{\gamma}{\delta} < 1$, huncque in finem ſtatuamus $\alpha = \beta + \mu$ et $\delta = \gamma + \nu$, vt aequatio noſtra ſit:

$$x^{\beta+\mu} . y^{\beta} + x^{\gamma} y^{\gamma+\nu} = 1.$$

§. 17. Hic autem ſtatim patet, ſubſtitutionem ante vſurpatam $y = u x$ hic nullum plane vſum eſſe allaturam. Ponamus autem modo generaliori $y = u x^{\theta}$, et aequatio reſultans erit:

$$x^{\beta+\mu+\beta\theta} u^{\beta} + x^{\gamma+\gamma\theta+\nu\theta} u^{\gamma+\nu} = 1.$$

Iam ambos ipſius $x$ exponentes ſtatuamus aequales, vt ſit

$$\beta + \mu + \beta\theta = \gamma + \gamma\theta + \nu\theta,$$

vnde reperitur $\theta = \frac{\beta+\mu-\gamma}{\gamma+\nu-\beta}$. Hinc autem fiet exponens ipſius $x = \frac{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}{\gamma+\nu-\beta}$. Hunc autem exponentem br. gr. ponemus $= \lambda$, vt ſit $\lambda = \frac{\beta\nu+\gamma\mu-\mu\nu}{\gamma+\nu-\beta}$, atque aequatio noſtra iam erit:

$$x^{\lambda}(u^{\beta} + u^{\nu+\gamma}) = 1, \text{ ideoque}$$

$$x = \frac{1}{(u^{\beta} + u^{\gamma+\nu})^{\frac{1}{\lambda}}}; \text{ tum autem erit}$$

$$y = x^{\theta} . u = \frac{u}{(u^{\beta} + u^{\gamma+\nu})^{\frac{\theta}{\lambda}}}, \text{ vbi eſt}$$

$$\frac{\theta}{\lambda} = \frac{\beta+\mu-\gamma}{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}.$$

Hic igitur exponens denominatoris ſemper eſt poſitiuus.

§. 18. Nunc vt aream exprimere poſſimus, differentiemus abſciſſam $x$, et quia coëfficientes ad noſtrum inſtitutum nihil conferunt, eos prorſus negligamus, eritque:

$$\partial x = \frac{(u^{\beta - 1} + u^{\gamma + \nu - 1})\, \partial u}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{\frac{1}{\lambda} + 1}}.$$

Hinc autem porro erit elementum areae:

$$y\, \partial x = \frac{\partial u\, (u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{\frac{1 + \lambda + \theta}{\lambda}}},$$

vbi exponens denominatoris eſt $\frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu + \mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}$, qui ergo ſemper eſt poſitiuus, atque adeo vnitate maior. Vnde ſi br. gr. ponamus $\frac{\mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu} = \xi$, iſte exponens erit $1 + \xi$, atque elementum areae nunc erit:

$$y\, \partial x = \frac{\partial u\, (u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})}{(u^{\beta} + u^{\gamma + \nu})^{1 + \xi}}.$$

§. 19. Ante autem quam noſtrum Lemma ſupra datum huc transferre liceat, tres caſus probe a ſe inuicem diſtingui oportet, prouti fuerit vel 1°. $\gamma + \nu > \beta$, vel 2°. $\gamma + \nu < \beta$, vel 3°. $\gamma + \nu = \beta$, vnde a poſtremo, vtpote ſimpliciſſimo, inchoëmus.

## Caſus I. quo $\beta = \gamma + \nu$.

§. 20. Hoc caſu ſubſtitutio adhibita locum habere plane nequit, propterea quo tam $\lambda$ quam $\theta$ in infinitum excreſcerent; verum hoc caſu negotium ſine vlla ſubſtitutione expediri poteſt. Cum enim aequatio noſtra fiat:

$$x^{\beta + \mu} y^{\beta} + x^{\gamma} y^{\beta} = 1,$$

hinc ſtatim fit:

$y^{\beta} =$

$$y^{\beta} = \frac{1}{x^{\beta+\mu} + x^{\gamma}}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{1}{(x^{\beta+\mu} + x^{\beta-\nu})^{\frac{1}{\beta}}},$$

conſequenter elementum areae:

$$y\,\partial x = \frac{\partial x}{(x^{\beta+\mu} + x^{\beta-\nu})^{\frac{1}{\beta}}};$$

vbi denominator ita exhiberi poteſt: $x^{\frac{\beta-\nu}{\beta}}(1 + x^{\mu+\nu})^{\frac{1}{\beta}}$, quo pacto formula noſtra integranda erit:

$$y\,\partial x = \frac{x^{\frac{\nu-\beta}{\beta}}\,\partial x}{(1 + x^{\mu+\nu})^{\frac{1}{\beta}}}.$$

§. 21. Nunc igitur ad hanc formam noſtrum Lemma applicare licebit, vt pateat, vtrum integrale huius formulae a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ valorem obtineat finitum, nec ne. Facta autem applicatione erit $m = \frac{\nu-\beta}{\beta}$, $n = \mu + \nu$, $k = \frac{1}{\beta}$, vnde vt ſpatium quaeſitum euadat finitum, primo eſſe debet $m + 1 > 0$, hoc eſt $\frac{\nu}{\beta} > 0$, quae conditio ſponte adimpletur, quoniam omnes litterae denotant numeros poſitiuos Altera vero conditio poſtulat vt ſit $m + 1 < nk$, hoc eſt $\frac{\nu}{\beta} < \frac{\mu+\nu}{\beta}$, quod pariter eſt manifeſtum, ita vt iam certum ſit, caſu $\gamma + \nu = \beta$ ſpatium, quod conſideramus, eſſe finitae magnitudinis.

## Caſus II. quo $\gamma + \nu > \beta$.

§. 22. Sit igitur $\gamma + \nu = \beta + \varepsilon$; hoc ergo caſu erit

$$\vartheta = \frac{\beta + \mu - \gamma}{\varepsilon} \text{ et } \lambda = \frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}{\varepsilon}.$$

Hinc cum iam ſit

$$x = \frac{1}{u^{\frac{\beta}{\lambda}}(1+u^{\varepsilon})^{\frac{\xi}{\lambda}}} \text{ et } y = \frac{u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}}{(1+u^{\varepsilon})^{\frac{\theta}{\lambda}}},$$

primo, ob $\lambda$ numerum poſitiuum, euidens eſt ſumto $u = \infty$ prodire $x = 0$; contra vero ſumto $u = 0$ fieri $x = \infty$. Caſu autem $u = \infty$ fit

$$y = \frac{u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}}{u^{\varepsilon\frac{\theta}{\lambda}}} = u^{1-\frac{\beta\theta-\varepsilon\theta}{\lambda}},$$

quod erit infinitum, ſi fuerit $1 > \frac{(\beta+\varepsilon)\theta}{\lambda}$, hoc eſt $\frac{\lambda}{\theta} > \beta + \varepsilon$. Eſt vero $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\beta\nu+\gamma\mu+\mu\nu}{\beta+\mu-\gamma}$, ideoque $\gamma + \nu > \beta$, quae eſt ipſa noſtra hypotheſis. Eodem modo oſtenditur, caſu $u = 0$ etiam fieri $y = 0$: erit enim $y = u^{1-\frac{\beta\theta}{\lambda}}$, vbi ergo exponens multo magis eſt poſitiuus quam praecedente caſu, ita vt certe ſit $y = 0$, facto $u = 0$. Hoc igitur notato formulam integralem $\int y\,\partial x$ a termino $u = \infty$ vsque ad $u = 0$ extendi oportet.

§. 23. Cum igitur $\theta$ et $\lambda$ ſint numeri poſitiui, elementum areae in duas partes diſcerpatur:

$$y\,\partial x = \frac{u^{\beta}\,\partial u}{u^{\beta+\beta\xi}(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}} + \frac{u^{\beta+\varepsilon}\,\partial u}{u^{\beta+\beta\xi}(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}}.$$

Nunc igitur Lemma noſtrum primo ad formulam priorem accommodemus, eritque $m = -\beta\xi$, $n = \varepsilon$ et $k = 1 + \xi$, vnde prima conditio, quae poſtulat $m + 1 > 0$, dat $1 > \beta\xi$, hoc eſt $\gamma + \nu > \beta$, quae eſt ipſa hypotheſis; vnde patet priorem conditionem $m + 1 > 0$ multo magis in altera formula locum habere. E contrario autem altera conditio $m + 1 < n k$ in priore formula certe valebit, ſi in poſteriore locum habeat. Pro altera autem formula eſt $m = \varepsilon - \beta\xi$ et $k n = \varepsilon(1 + \xi)$. Quare cum eſſe debeat $m + 1 < n k$, erit nobis $1 - \beta\xi < \varepsilon\xi$, hinc

hinc ſubſtituto loco $\xi$ valore erit $\beta < \gamma + \nu$, quae iterum eſt ipſa hypotheſis praeſcripta, vnde etiam pro hoc caſu Theorema noſtrum eſt euictum.

### Caſus III. quo $\gamma + \nu < \beta$.

§. 24. Sit igitur $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$, vnde ambo valores $\theta$ et $\lambda$ euadent negatiui, ſcil. $\theta = \frac{\beta + \mu - \gamma}{-\varepsilon}$ et $\lambda = \frac{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}{-\varepsilon}$, vnde erit

$$x = \frac{1}{u^{\frac{\beta - \varepsilon}{\lambda}} (1 + u^{\varepsilon})^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Hinc quia $\lambda$ valorem habet negatiuum, euidens eſt, inuerſo modo fieri $x = 0$, quando $u = 0$, atque $x = \infty$, ſi $u = \infty$. Hinc autem iam ex natura rei ſequitur, priore caſu fieri $y = \infty$, poſteriore vero $y = 0$, ideoque nunc formulam integralem $\int y \partial x$ ab $u = 0$ vsque ad $u = \infty$ extendi oportet.

§. 25. Quanquam autem hic valores litterarum $\theta$ et $\lambda$ ſunt negatiui, tamen exponens principalis $\xi$ ſemper eſt poſitiuus, ſiquidem eſt $\xi = \frac{\mu + \nu}{\beta\nu + \gamma\mu + \mu\nu}$, quae expreſſio ob $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$ transformatur in hanc:

$$\xi = \frac{\mu + \nu}{\beta(\mu + \nu) - \varepsilon\mu};$$

vbi notetur $\varepsilon$ non ſolum eſſe numerum poſitiuum ſed etiam minorem quam $\beta$. Nunc igitur formulam pro area accuratius perpendamus, quae ob $\gamma + \nu = \beta - \varepsilon$ ita ſe habebit:

$$y \partial x = \frac{u^{\beta} \partial u + u^{\beta - \varepsilon} \partial u}{(u^{\beta} + u^{\beta - \varepsilon})^{1 + \xi}},$$

cuius denominator, quia factorem habet $u^{\beta - \varepsilon}$, ita repraeſentetur: $(u^{\beta - \varepsilon})^{1 + \xi} (1 + u^{\varepsilon})^{1 + \xi}$, hocque modo area quaeſita dua-

bus his conſtabit partibus:

$$\int y\,\partial x = \int \frac{u^{-\xi(\beta-\varepsilon)}\,\partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}} + \int \frac{u^{\varepsilon-\xi(\beta-\varepsilon)}\,\partial u}{(1+u^{\varepsilon})^{1+\xi}}.$$

§. 26. Nunc vtramque hanc formulam ſecundum noſtrum Lemma examinemus, et facta comparatione pro priore habebimus $m = -\xi(\beta-\varepsilon)$; $n = \varepsilon$ et $k = 1+\xi$, vnde prima conditio $m+1 > 0$ dat $1-\xi(\beta-\varepsilon) > 0$, quae, ſubſtituto valore ipſius $\xi$, praebet:

$$\beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu - (\mu+\nu)(\beta-\varepsilon) > 0,$$

quae euoluta dat $\varepsilon\nu > 0$, quod ob $\varepsilon$ et $\nu$ numeros poſitiuos per ſe eſt manifeſtum. Simul vero hinc patet, ſi $\nu$ eſſet negatiuum, tum iſtam conditionem non adimpleri, ideoque aream prodituram eſſe infinitam. Altera vero conditio, quae poſtulat $m+1 < nk$, praebet

$$1 - \xi(\beta-\varepsilon) < \varepsilon(1+\xi),$$

ſiue $1-\beta\xi < \varepsilon$, ac pro $\xi$ valore ſubſtituto:

$$-\varepsilon\mu < \varepsilon[\beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu],$$

quae per numerum poſitiuum diuiſa praebet hanc conditionem:

$$\varepsilon\mu - \mu < \beta(\mu+\nu),$$

quae conditio etiam manifeſto adimpletur, ob $\varepsilon < \beta$.

§. 27. Simili modo alteram formulam tractemus, in qua $m = \varepsilon - \xi(\beta-\varepsilon)$, $n = \varepsilon$ et $k = 1+\xi$. Cum igitur hic ſit $m$ maius quam ante, prior conditio multo magis implebitur; pro altera autem conditione hic habebimus:

$$m+1 = 1+\varepsilon-\xi(\beta-\varepsilon) = 1+\varepsilon(1+\xi)-\beta\xi.$$

At vero $nk$ eſt $\varepsilon(1+\xi)$, vnde ſecunda conditio poſtulat $1-\beta\xi < 0$, ſiue $\beta\xi > 1$, hoc eſt

$$\beta(\mu+\nu) > \beta(\mu+\nu) - \varepsilon\mu$$

ſiue

ſiue $\varepsilon\mu > 0$, quod vtique euenit, quia $\mu$ ſupponitur poſitiuum. Simul vero hinc patet, ſi $\mu$ eſſet negatiuum, tum ſpatium quaeſitum futurum eſſe infinitum, quae circumſtantia etiam in caſu primo locum habet.

§. 28. His igitur tribus caſibus coniunctis ſummo vigore euictum eſt, ſpatium inter has Hyperbolas et ſuas aſſymtotas incluſum ſemper fore finitae magnitudinis, ſi modo litterae $\mu$ et $\nu$ fuerint poſitiuae, vti quidem aſſumſimus; tum autem fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ vnitate erit maior, altera vero fractio $\frac{\gamma}{\delta}$ vnitate minor, quae fractiones cum permutationes patiantur, ſequitur, quoties ambarum harum fractionum $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ altera fuerit vnitate maior, altera minor, toties ſpatium memoratum finitam habiturum eſſe magnitudinem, ſimul vero quoque demonſtratum eſt, ſi vel ambae hae fractiones fuerint maiores vnitate vel minores, toties iſtud ſpatium eſſe infinitum.

§. 29. Hactenus quidem contenti fuimus eos caſus aſſignare, quibus ſpatium memoratum habeat finitam quantitatem, neque vero ſolliciti fuimus de vera eius quantitate, quae plerumque formulas integrales intractabiles poſtulat, vbi ſcilicet integratio ad quantitates maxime tranſcendentes aſſurgeret. Caſum igitur ſatis memorabilem ſubiungamus, quo ipſam iſtam aream adeo algebraice ſatis ſimplici modo exprimere licet.

## Problema.

*Si natura curuae hyperbolicae hac aequatione fuerit expreſſa:* $a x^\alpha y^\beta + b x^\beta y^\alpha = c$, *vbi coëfficientes* a, b, c, *omnes ſint poſitiui, exponentes vero* $\alpha$ et $\beta$ *ita comparati, vt eorum ſumma vnitati aequetur, aream inueſtigare, quam iſtae curuae in infinitum productae intra ſuas aſſymtotas includunt.*

## Solutio.

§. 30. Quoniam aſſumitur $\alpha + \beta = 1$, ponamus

$$\alpha = \frac{1+\lambda}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\lambda}{2},$$

vt ſit $\alpha - \beta = \lambda$. Nunc ponatur $y = u\,x$, et aequatio noſtra dabit: $(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)\,x = c$, vnde fit

$$x = \frac{c}{a\,u^\beta + b\,u^\alpha}, \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{c\,u}{a\,u^\beta + b\,u^\alpha}; \text{ tum igitur erit}$$

$$\partial x = -\frac{c\,(a\,\beta\,u^{\beta-1} + b\,\alpha\,u^{\alpha-1})\,\partial u}{(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)^2},$$

ex quo conficitur elementum areae:

$$y\,\partial x = -\frac{\beta\,a\,c\,c\,u^\beta - \alpha\,b\,c\,c\,u^\alpha}{(a\,u^\beta + b\,u^\alpha)^3}\,\partial u.$$

§. 31. Nunc loco $\alpha$ et $\beta$ valores ante aſſumtos ſcribamus, eritque

$$a\,u^\beta + b\,u^\alpha = u^{\frac{1-\lambda}{2}}\,(a + b\,u^\lambda),$$

quo valore ſubſtituto reperietur:

$$y\,\partial x = -\frac{\beta\,a\,c\,c\,u^{\lambda-1} - \alpha\,b\,c\,c\,u^{2\lambda-1}}{(a + b\,u^\lambda)^3}\,\partial u,$$

ideoque

$$\int y\,\partial x = -\,c\,c\int\frac{\beta\,a\,u^{\lambda-1}\,\partial u + \alpha\,b\,u^{2\lambda-1}\,\partial u}{(a + b\,u^\lambda)^3}.$$

Ponatur nunc $a + b\,u^\lambda = z$, erit $u^\lambda = \frac{z-a}{b}$, $u^{\lambda-1}\,\partial u = \frac{\partial z}{\lambda b}$ et $u^{2\lambda-1}\,\partial u = \frac{(z-a)\,\partial z}{\lambda\,b\,b}$, quibus valoribus ſubſtitutis erit:

$$\int y\,\partial x = -\frac{c\,c}{\lambda\,b\,b}\int\frac{\partial z}{z^3}\,[(\beta - \alpha)\,a\,b + \alpha\,b\,z],$$

ſiue

ſiue

$$\int y\,\partial x = -\frac{cc}{\lambda b}\int\frac{(\alpha z - \lambda a)\,\partial z}{z^3},$$

cuius integrale eſt

$$\int y\,\partial x = C - \frac{cc}{\lambda b}\left(\frac{\lambda a}{2zz} - \frac{\alpha}{z}\right).$$

§. 32. Reſtituto iam loco $z$ valore aſſumto erit area quaeſita in genere:

$$\int y\,\partial x = C - \frac{cc}{\lambda b}\left(\frac{\lambda a}{2(a+bu^\lambda)^2} - \frac{\alpha}{a+bu^\lambda}\right),$$

vbi, quia $x$ fit $= 0$ ſumto $u = \infty$, conſtans ita definiatur, vt facto $u = \infty$ area euaneſcat, vnde manifeſtum eſt ſtatui debere $C = 0$, ita vt iam ſit area indefinita a termino $x = 0$ ſumta

$$\int y\,\partial x = \frac{cc}{\lambda b}\left(\frac{\alpha}{a+bu^\lambda} - \frac{\lambda a}{2(a+bu^\lambda)^2}\right).$$

Nunc igitur abſciſſa $x$ in infinitum vsque extendatur, quod fit ponendo $u = 0$, atque tota noſtra area quaeſita erit:

$$\frac{cc}{ab}\left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) = \frac{cc}{2ab}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{cc}{2ab(\alpha-\beta)},$$

quae ergo area ſemper eſt finita, niſi ſit $\alpha = \beta$, quem autem caſum iam excluſimus, quippe pro Hyperbola conica.

§. 33. Cum exponentes $\alpha$ et $\beta$ eiusmodi deſignent fractiones, quarum ſumma vnitati aequetur, ſumamus duos numeros integros quoscunque $\mu$ et $\nu$, quorum ſit ſumma $\lambda = \mu + \nu$, ac ſtatui poterit $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ et $\beta = \frac{\nu}{\lambda}$, ita vt aequatio pro noſtris curuis hyperbolicis ſit:

$$a\sqrt[\lambda]{x^\mu y^\nu} + b\sqrt[\lambda]{x^\nu y^\mu} = c,$$

et iam ſpatium inter has curuas et ſuas aſſymtotas contentum



erit

erit $\frac{\lambda c c}{2 a b (\mu - \nu)}$. Hic autem imprimis quaeritur aequatio rationalis, qua harum curuarum natura exprimatur, vt pateat ad quemnam ordinem hae curuae ſint referendae, id quod ope ſequentis Lemmatis facillime praeſtabitur.

# Lemma.

§. 34. Quod ſi $p$ et $q$ fuerint radices huius aequationis quadraticae: $z z - f z + g = 0$, ita vt ſit $p + q = f$ et $p q = g$, aggregatum binarum quarumuis poteſtatum ipſarum $p$ et $q$ ſequenti modo exprimitur:

$$p + q = f,$$
$$p^2 + q^2 = ff - 2g,$$
$$p^3 + q^3 = f^3 - 3fg,$$
$$p^4 + q^4 = f^4 - 4ffg + 2gg,$$
$$p^5 + q^5 = f^5 - 5f^3 g + 5fgg,$$
$$p^6 + q^6 = f^6 - 6f^4 g + 9ffgg - 2g^3,$$
$$p^7 + q^7 = f^7 - 7f^5 g + 14f^3 gg - 7fg^3,$$
$$p^8 + q^8 = f^8 - 8f^6 g + 20f^4 gg - 16ffg^3 + 2g^4,$$
$$p^9 + q^9 = f^9 - 9f^7 g + 27f^5 gg - 30f^3 g^3 + 9fg^4,$$
$$p^{10} + q^{10} = f^{10} - 10f^8 g + 35f^6 gg - 50f^4 g^3 + 25ffg^4 - 2g^5,$$

etc.

atque hinc in genere concluditur fore:

$$p^\lambda + q^\lambda = f^\lambda - \lambda f^{\lambda-2} g + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1.2} f^{\lambda-4} gg - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3} f^{\lambda-6} g^3 + \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1.2.3.4} f^{\lambda-8} g^4 - \text{etc.}$$

quae autem formula non valet, niſi exponens $\lambda$ fuerit numerus integer poſitiuus, ac praeterea iſti termini non vltra exponentes poſitiuos ipſius $f$ continuentur.

§. 35.

§. 35. Quod ſi iam hoc Lemma ad noſtrum caſum accommodemus, erit $p = a\sqrt[\lambda]{x^\mu y^\nu}$ et $q = b\sqrt[\lambda]{x^\nu y^\mu}$, tum vero habebimus $p + q = c$ et productum $pq = abxy$, ita vt nunc ſit $f = c$ et $g = abxy$, quibus notatis formula generalis in Lemmate data nobis ſtatim ſuppeditat hanc aequationem rationalem:

$$a^\lambda x^\mu y^\nu + b^\lambda x^\nu y^\mu = c^\lambda - \lambda c^{\lambda-2} abxy + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1.2} c^{\lambda-4} a^2 b^2 x^2 y^2$$
$$- \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.2.3.} c^{\lambda-6} a^3 b^3 x^3 y^3 + \text{etc.}$$

quae ergo aequatio manifeſto pertinet ad ordinem $\lambda^{um}$.

§. 36. Percurramus nunc aliquot caſus ſimpliciores, ſitque 1°. $\mu = 2$, $\nu = 1$ et $\lambda = 3$, ita vt aequatio pro Hyperbolis irrationalis ſit $b\sqrt[3]{xxy} + b\sqrt[3]{xyy} = c$, atque aequatio rationalis hinc nata erit:

$$a^3 xxy + b^3 xyy = c^3 - 3cabxy,$$

et ſpatium quaeſitum inter curuam et ſuas aſſymtotas contentum erit $= \frac{3cc}{2ab}$. 2°. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 1$, ideoque $\lambda = 4$, vt aequatio pro curuis ſit $a\sqrt[4]{x^3 y} + b\sqrt[4]{xy^3} = c$, quae ad rationalem perducta ſit:

$$a^4 x^3 y + b^4 xy^3 = c^4 - 4c^2 abxy + 2a^2 b^2 x^2 y^2,$$

et ſpatium quaeſitum hinc erit $= \frac{cc}{ab}$. 3°. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 2$, ideoque $\lambda = 5$, vt aequatio ſit

$$a\sqrt[5]{x^3 yy} + b\sqrt[5]{xxy^3} = c,$$

quae ad rationalem perducta ſit:

$$a^5 x^3 yy + b^5 xxy^3 = c^5 - 5c^3 abxy + 5ca^2 b^2 x^2 y^2,$$

et ſpatium quaeſitum $= \frac{5cc}{2ab}$. 4°. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 1$, ideoque $\lambda = 5$, erit aequatio:

$$a\sqrt[5]{x^4 y} + b\sqrt[5]{x y^4} = c,$$

et rationaliter

$$a^5 x^4 y + b^5 x y^4 = c^5 - 5 c^3 a b x y + 5 c a^2 b^2 x^2 y^2,$$

et ſpatium $= \frac{5cc}{6ab}$. 5°. Sit $\mu = 5$, $\nu = 1$ et $\lambda = 6$, erit aequatio pro curuis: $a\sqrt[6]{x^5 y} + b\sqrt[6]{x y^5} = c$, et rationalis:

$$a^6 x^5 y + b^6 x y^5 = c^6 - 6 c^4 a b x y + 9 c c a^2 b^2 x^2 y^2 - 2 a^3 b^3 x^3 y^3,$$

et ſpatium $= \frac{3cc}{4ab}$.

§. 37. Quanquam autem ex aequatione irrationali aream facile definire licuit: tamen ſi aequatio rationalis proponeretur, vix vlla via pateret ex ea aream inueſtigandi, quandoquidem ad hoc requireretur reſolutio aequationum cuiusuis gradus. Interim tamen, quoties talem aequationem reſoluere licet, ex ea area haud difficulter elicietur, id quod vnico exemplo oſtendiſſe ſufficiet.

## Exemplum.

*Si proponatur linea hyperbolica tertii ordinis, ſub hac aequatione:*

$$x x y + x y y = 1 - 3 x y,$$

*contenta, eius aream inter aſſymtotas contentam inueſtigare?*

§. 38. Primo igitur ex hac aequatione valor applicatae $y$ per abſciſſam $x$ expreſſus inueſtigetur, qui erit:

$$y = -\frac{(x+3)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{1}{x}\right)},$$

quae ſi comparetur cum ſpeciebus linearum tertii ordinis a *Newtono* enumeratis, deprehenditur pertinere ad eius ſpeciem vigeſimam ſecundam. Scilicet ſi recta A C B ſit axis abſciſſarum et C initium, tum vero per C ducatur normalis D E, praeterea

rea vero capiantur interualla $CF = CG = 3$, tum tres rectae Tab. II.
ACB, DCE et HFGI, erunt tres aſſymtotae curuae in Fig. 5.
noſtra aequatione contentae, quae ergo ex tribus Hyperbolis erit compoſita, quarum prima *ad* continetur intra angulum ACD, ſecunda *eh* intra angulum EFH, ac tertia *ib* intra angulum IGB. Praeterea dabitur diameter KCL, angulum rectum ACD biſecans, ita vt portiones curuarum vtrinque ſint inter ſe aequales, Imprimis autem hic notandum eſt, ad has curuas pertinere punctum coniugatum O, in ipſo diametro KL, ad diſtantiam $CO = \sqrt{2}$ ſitum. Deinde notaſſe iuuabit ſi per O ex G producatur recta GM, hanc fore diametrum obliquangulum noſtrae curuae, ſcilicet, ſi poſita abſciſſa $AX = x$ applicata YX producatur, vt inferiorem Hyperbolam ſecet in $Y'$, tum interuallum $YY'$ ab hoc diametro GM in V biſariam ſecabitur, ita vt vbique ſit $VY = VY'$. Nam euidens eſt, hanc rectam GM ipſam CF biſecare in S, ſicque fore $CS = \frac{1}{2} GC$: erit ergo etiam

$$XV = \frac{1}{2} GX = \frac{x+3}{2},$$

cui ſi addatur $XY = y$, ex valore ſupra inuento prodit:

$$VY = y + \frac{x+3}{2} = \sqrt{\left(\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{1}{x}\right)},$$

quae formula cum ſit radicalis, ſequitur ex altera parte fore pariter $VY' = VY$, ideoque rectam GV diametrum. Caeterum notatu dignum hic occurrit punctum coniugatum O eſſe centrum grauitatis trianguli FCG, tum vero ſi haec recta aſſymptotam GFH ſecet in puncto $X'$, erit etiam $VX = VX'$, ſicque etiam $X'Y' = y$; vnde patet, aream, quam curua *ad* intra ſuas aſſymptotas includit, aequalem fore areae intra asſymptotas HF et FE ſuamque curuam *he* comprehenſae. Simili modo recta ex F per O producta etiam erit diameter obliquangula biſecans omnes ordinatas axi AB parallelas.

 §. 39.

§. 39. Ex valore autem pro applicata $y$ inuento inveſtigemus aream curuae indefinitam D $d$ C $x\,y$, cuius elementum eſt

$$y\,\partial x = -\frac{\partial x}{2}(x+3) \pm \frac{\partial x}{2}\sqrt{(xx+6x+9+\tfrac{4}{x})},$$

vbi partis prioris integrale manifeſto eſt $-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2}x$; partis vero poſterioris integratio merito maxime ardua videretur, niſi commode eueniret vt formula poſt ſignum radicale factorem habeat quadratum. Eſt enim

$$xx+6x+9+\frac{4}{x} = \frac{x^3+6xx+9x+4}{x} = \frac{x+4}{x}(x+1)^2,$$

vnde pars areae poſterior ita exprimetur vt ſit

$$\pm\tfrac{1}{2}(x+1)\,\partial x\sqrt{\frac{x+4}{x}}.$$

§. 40. Ad hanc formulam integrandam ponamus $x = vv$, ac integralis pars poſterior erit

$$\pm\int\partial v\,(vv+1)\sqrt{(vv+4)}.$$

Sit nunc $\sqrt{(vv+4)} = v+2t$, eritque $v = \frac{1-tt}{t}$, ideoque

$$\sqrt{(vv+4)} = \frac{1+tt}{t} \text{ et } vv+1 = \frac{1-tt+t^4}{tt},$$

ac denique $\partial v = -\frac{\partial t\,(1+tt)}{tt}$, quibus ſubſtitutis formula propoſita induit hanc formam:

$$-\int\frac{(1+tt)^2(1-tt+t^4)\partial t}{t^5} = -\int\frac{\partial t}{t^5}(1+tt+t^6+t^8),$$

cuius ergo integrale eſt

$$\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2tt}-\frac{1}{2}tt-\frac{1}{4}t^4 = \frac{1+2tt-2t^6-t^8}{4t^4} = \frac{(1-tt)(1+tt)^3}{4t^4},$$

et reſtitutis valoribus $\dfrac{v\,(vv+4)^{\frac{3}{2}}}{4}$, atque adeo per $x$ erit haec pars: $\dfrac{(x+4)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{4}$, hincque area quaeſita erit:

$\int y\,\partial x$

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2}x + \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{4},$$

vbi conſtantis additione non eſt opus, quia haec area ſponte euaneſcit caſu $x = 0$. Faciamus nunc $x = \infty$, et cum ſit

$$\sqrt{(xx+4x)} = x + 2 - \tfrac{2}{x},$$

haec area erit

$$= -\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2}x + \frac{(x+2-\frac{2}{x})(x+4)}{4},$$

quod euolutum et $x$ infinitum poſitum dat aream $= \tfrac{3}{2}$, prorſus vti ſupra aſſignauimus, ob $a = b = c = 1$. Hinc autem facile intelligitur talem calculum pro curuis altioribus neutiquam inſtitui poſſe.

# DE CVRSV NAVIS IN SPHAEROIDE ELLIPTICO.

Auctore
*F. T. SCHVBERT.*

*Conuent. exhib. die* 16 *Ian.* 1792.

§. 1.

Vniuerſa ars Nautica ſine difficultate reduci poteſt ad ſequens Problema: *Dato ſitu duorum locorum, inuenire curſum nauis intermedium*, ſiue angulum conſtantem, ſub quo omnes Meridianos ſecat directio nauis, deſcribentis in mari curvam, quae vulgo dicitur *Loxodromia.* Omnes reliqui caſus in arte nautica occurrentes, Problematis huius idonea applicatione vel etiam inuerſione facile ſoluuntur. Mappae hydrographicae a *Mercatore* inuentae nihil aliud ſunt niſi eiusdem Problematis ſolutio breuis per conſtructionem, ſeu proiectio Loxodromiae in lineam rectam, quemadmodum infra videbimus. Cardo itaque rei verſatur in determinanda curua Loxodromica, de qua quum iam olim Academiae a me oblata ſit Diſſertatio, figuram telluris ſphaericam ſupponens, haud ſuperfluum fore exiſtimavi, ſi hanc quoque disquiſitionem ad figuram ellipticam extenderem. Quodſi enim in Geographia vel aliqua ſperanda ſit vtilitas ex conſideratione figurae telluris ellipticae petenda, non dubito, quin ea potiſſimum ad vſum nauticum ſit referenda.

Re-

Reuera quoque videbimus, differentiam hinc oriundam non eſſe negligendam; quare quum calculus magis complexus mapparum tantum hydrographicarum conſtructionem reddat difficiliorem, non autem vſum earum in praxi nautica, hinc non leuis oriri videtur artis nauticae emendatio. Quinimmo ipſius mapparum conſtructionis difficultas prorſus tolletur tabula hunc in finem a me computata, quae in mappis hydrographicis adornandis loco tabulae ſecantium vel partium Meridionalium eſt ſubſtituenda.

§. 2. Sint itaque in Sphaeroide elliptico duo puncta A, B, iuncta curua Loxodromica A M B, in qua pro arbitrio aſſumatur punctum M. Ductis e Polo P Meridianis P A, P B, P M et P $n$ ipſi P M proximo, per punctum $n$ feratur arcus Aequatori parallelus $n\,\mu$. Proinde ſi Loxodromia Meridianos ſecet ſub angulo conſtante P M B $=\Phi$, erit in Triangulo elementari M $n\,\mu$, $\mu\,n = \mathrm{M}\,\mu\,\mathrm{tang}\,\Phi$. Poſita iam latitudine puncti M $=\mu$, angulo A P M $=\psi$, ſemiaxe maiore Meridiani elliptici, ſeu radio Aequatoris $=1$, ſemiaxe minore $=b$, et $\frac{1}{b}=m$, erit e natura ellipſeos radius Paralleli $\mu\,n$ Tab. III. Fig. 1.

$$=y=\frac{m}{\sqrt{(m^2+\mathrm{tang}^2\,\mu)}},$$

ideoque elementum

$$\mu\,n=\frac{m\,\partial\,\psi}{\sqrt{(m^2+\mathrm{tang}^2\,\mu)}},\text{ et arcus}$$

$$\mathrm{M}\,\mu=\frac{-\partial\,y}{\mathrm{ſin.}\,\mu}=\frac{m\,\mathrm{ſec}^3\,\mu\,\partial\,\mu}{(m^2+\mathrm{tang}^2\,\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quibus valoribus in aequatione fundamentali, $\mu\,n=\mathrm{M}\,\mu\,\mathrm{tang}\,\Phi$, ſubſtitutis, atque poſito $\mathrm{tang}\,\Phi=a$, nanciſcimur:

$$\partial\,\psi=\frac{a\,\mathrm{ſec}^3\,\mu\,\partial\,\mu}{m^2+\mathrm{tang}^2\,\mu}=\frac{a\,\mathrm{ſec}\,\mu\,\partial.\,\mathrm{tang}\,\mu}{m^2+\mathrm{tang}^2\,\mu},$$

ſeu ſcripto $u$ loco $\mathrm{tang}\,\mu$, $\partial\,\psi=\frac{a\,\partial\,u\,\sqrt{(1+u\,u)}}{m\,m+u\,u}$. Statuatur

 ſec

ſec $\mu = v$ tang $\mu$, ut ſit $v =$ coſec $\mu$; unde ſit $1 + uu = u^2 v^2$, $u^2 = \frac{1}{v^2 - 1}$,

$$\surd\,(1 + uu) = \frac{v}{\surd\,(vv - 1)}, \text{ atque}$$

$$\partial u = \frac{-v\,\partial v}{(vv - 1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ proinde}$$

$$\partial \psi = \frac{-a v^2 \partial v}{(v^2 - 1)(m^2 v^2 - m^2 + 1)},$$

ſeu poſito $m^2 - 1 = n^2$,

$$\partial \psi = \frac{-a v^2 \partial v}{(v^2 - 1)(m^2 v^2 - n^2)}.$$

Haec expreſſio ſi diſpeſcatur in partes ſecundum factores denominatoris, orietur

$$\frac{-\partial \psi}{a} = \frac{v^2 \partial v}{2(m^2 - n^2)} \left( \frac{1}{v - 1} - \frac{1}{v + 1} + \frac{m^2}{n(mv + n)} - \frac{m^2}{n(mv - n)} \right),$$

quae formula, diuiſa quantitate $v^2$ per denominatores $v - 1$, $v + 1$, etc. ob $m^2 - n^2 = 1$, abit in ſequentem:

$$\frac{\partial \psi}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{v + 1} - \frac{\partial v}{v - 1} + \frac{n\,\partial v}{mv - n} - \frac{n\,\partial v}{mv + n} \right),$$

vnde fit integrando:

$$\frac{\psi}{a} = \log.\ \surd\,\frac{v + 1}{v - 1} + \frac{n}{m} \log.\ \surd\,\frac{mv - n}{mv + n}.$$

Verum eſt

$$\frac{n}{m} = \frac{\surd\,(1 - bb)}{mb} = \surd\,(1 - bb),$$

ſeu aequalis excentricitati ellipſeos Meridianorum, qua poſita $= c$, habemus:

$$\frac{\psi}{a} = \log.\ \surd\,\frac{v + 1}{v - 1} - c \log.\ \surd\,\frac{v + c}{v - c},$$

ubi ſi ſubſtituatur $v =$ coſec $\mu$, tandem fit

$$\frac{\psi}{a} = \log.\ \surd\,\frac{1 + \sin.\,\mu}{1 - \sin.\,\mu} - c \log.\ \surd\,\frac{1 + c \sin.\,\mu}{1 - c \sin.\,\mu}.$$

§. 3. Conſtans adiicienda inde determinatur, quod caſu $\psi = 0$, angulus $\mu$ aequari debet latitudini puncti $A = \alpha$.

Qua

Quapropter Conſtans iſta erit

$$= -\log.\sqrt{\frac{1+\text{ſin.}\,\alpha}{1-\text{ſin.}\,\alpha}} + c\log.\sqrt{\frac{1+c\,\text{ſin.}\,\alpha}{1-c\,\text{ſin.}\,\alpha}}.$$

Quum pariter caſu $\psi = APB = \gamma$, angulus $\mu$ aequalis eſſe debeat latitudini puncti $B = \beta$, nanciſcimur hanc aequationem.

$$\frac{\gamma}{a} = \log.\sqrt{\frac{1+\text{ſin.}\,\beta}{1-\text{ſin.}\,\beta}} - \log.\sqrt{\frac{1+\text{ſin.}\,\alpha}{1-\text{ſin.}\,\alpha}}$$
$$+ c\log.\sqrt{\frac{1+c\,\text{ſin.}\,\alpha}{1-c\,\text{ſin.}\,\alpha}} - c\log.\sqrt{\frac{1+c\,\text{ſin.}\,\beta}{1-c\,\text{ſin.}\,\beta}}.$$

Ponamus adhuc $c$ ſin $\alpha =$ ſin $\delta$, $c$ ſin $\beta =$ ſin $\varepsilon$, ut fiat

$$\frac{\gamma}{a} = \log.\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - \log.\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ c\log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\delta) - c\log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon);$$

quae aequatio praebet tangentem $a$ anguli Loxodromiae cum Meridianis, dato ſitu locorum A, B, per eorum latitudines $\alpha$, $\beta$, et differentiam longitudinum $\gamma$. Si nempe breuitatis ergo ſcribamus A, B, D, E, loco iſtorum logarithmorum, erit $a = \text{tang.}\,\Phi = \frac{\gamma}{B-A+D-E}$.

§. 4. Aſſumta figura telluris ſphaerica, ſit angulus Loxodromiae cum Meridianis $= \Phi'$, quare cum ſit $c = 0$, erit

$$\text{tang.}\,\Phi' = \frac{\gamma}{B-A},\ \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi = \frac{\gamma}{B-A+D-E}.$$

Si iam $\beta > \alpha$, ideoque $\varepsilon > \delta$, vel $E > D$, erit quoque $\Phi > \Phi'$. Sin autem $\alpha > \beta$, h. e. $A > B$, et $D > E$, binae formulae abeunt in iſtas:

$$\text{tang.}\,\Phi' = \frac{-\gamma}{A-B},\ \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi = \frac{-\gamma}{A-B-(D-E)},$$

proinde iterum tang. $\Phi >$ tang. $\Phi'$. Unde ob valorem tangentis negativum ſequitur, angulum obtuſum $\Phi$ minorem, ſeu angulum acutum, qui eſt eius complementum ad 180°, in elliptica figura maiorem eſſe complemento anguli $\Phi'$ in figura ſphaerica. Unde, ſi ſemper anguli recto minores intelligantur, concluditur in genere, Loxodromiam Aequatorem et Parallelos

rallelos ſub minoribus angulis ſecare in Sphaeroide elliptico quam in Sphaera, ſive curſum navis priore caſu magis verſus Orientem vel Occidentem eſſe dirigendum, quam caſu altero.

§. 5. Cognito ſic angulo P A B $= \Phi$, facile reperitur longitudo arcus A M $= s$. Eſt enim M $n = \partial s = \frac{M\mu}{coſ.\,\Phi}$, unde ob $\Phi$ conſtantem, arcus Loxodromiae rectificari poteſt conceſſa rectificatione arcus M $\mu$, h. e. rectificatione circuli vel ellipſeos, prout figura telluris aſſumitur ſphaerica vel elliptica. Ductis nempe arcubus parallelis M $\nu$ et B $\beta$, eſt M $\mu$ elementum arcus A $\nu$, conſequenter A M $= \frac{A\nu}{coſ.\,\Phi}$. Totius itaque curuae A B longitudo eſt $= \frac{A\beta}{coſ.\,\Phi}$; vnde in Sphaera eſt A B $= \frac{\beta - \alpha}{coſ\,\Phi}$, in Sphaeroide autem pro arcu A $\beta$ inuenienda eſſet formula exprimens arcum ellipticum per latitudines. Sed quum iam alia occaſione Academiae a me oblata ſit tabula exhibens arcum Meridiani elliptici pro quauis latitudine, arcus A $\beta$ indepeti poſſunt; quare his non diutius immoror.

§. 6. Iam ſine difficultate applicari haec poſſunt ad mapparum hydrographicarum conſtructionem, quarum finis primarius eſt, vt linea Loxodromiam repraeſentans Meridianos ſub eodem angulo conſtante $\Phi$ interſecet ac in ipſa tellure, quem in finem elementa Meridianorum ac Parallelorum in eadem ratione ſunt conſtruenda, quam in tellure tenent. Si enim *Figura ſecunda* partem mappae repraeſentet, eſſe oportet

$$\frac{\mu n}{M\mu} = \text{tang}\,\Phi = \frac{(m^2 + tang^2\,\mu)\,\partial\psi}{ſec^3\,\mu\,\partial\mu}\ (\S.\ 2.),$$

quam eſſe rationem genuinam in Sphaeroide elliptico, ibidem vidimus. Variis autem modis proportio haec obtineri poteſt, pro diverſis, quas in proiectione ſequi velimus, legibus. Velut

ut ſi Meridiani eſſe debeant lineae rectae in polo P ſe ſecantes, atque Paralleli circuli concentrici circa centrum P, ponatur radius Paralleli PM $= x$, longitudo puncti M $= \lambda$, atque eſſe oportet

$$\frac{\mu n}{M \mu} = \frac{x \partial \lambda}{- \partial x} = \text{tang}\, \Phi = \frac{(m^2 + tang^2 \mu) \partial \psi}{sec^3 \mu \partial \mu}.$$

Quum autem nihil impediat, quo minus gradus Aequatoris $m\nu$ capiantur aequales, ſtatui poteſt $\lambda = \psi$, aut ſaltem $n\lambda = \psi$, unde habemus: $\frac{-x}{n \partial x} = \frac{m^2 + tang^2 \mu}{sec^3 \mu \partial \mu}$, et integrando

$$n\, l \tfrac{1}{x} = \int \frac{sec^3 \mu \partial \mu}{m^2 + tang^2 \mu}.$$

Poſterius integrale iam ſupra (§. 2.) inuentum fuit

$$= log.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} \mu) - c\ log.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} \nu),$$

poſito nempe $c$ ſin $\mu =$ ſin $\nu$. Unde fit

$$x = \sqrt[n]{\frac{\text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} \nu)^c}{\text{tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} \mu)}}.$$

Conſtans nulla adiicitur, quoniam caſu $\mu = 90^\circ$, eſſe debet $x = 0$, et caſu $\mu = 0$, $x = \text{P}\, m = 1$; idemque praebet formula noſtra. Caſu $n = 1$, fit $\lambda = \psi$, et angulus

$$m \text{P} \nu = \frac{m \nu}{\text{P} m} = \frac{\partial \lambda}{1} = \partial \psi,$$

unde patet, omnes angulos ad polum per angulos ipſis aequales repraeſentari. Hac quidem proiectione obtinetur, vt omnes figurae minimae in telluris ſuperficie per alias ipſis perfecte ſimiles in mappa repraeſententur. Quum autem fieri nequeat, ut Meridiani P $m$, P $\nu$, a linea recta ſub iisdem angulis ſecentur, ſequitur, Loxodromiae proiectionem M $n$ eſſe curvam; unde haec proiectio in mappis nauticis uſum habere nequit.

§. 7. Methodi ſcilicet inter nautas receptae, curſum navis vel angulum $\Phi$ menſurandi, neceſſario requirunt, vt Loxodro-

xodromiae proiectio ſit linea recta, atque non ſecus ac in tellure cum Meridianos tum Parallelos ſub angulo ſecet conſtante: quem in finem opus eſt, ut Meridiani ſint rectae parallelae, et Paralleli rectae illis normales. Quare ſi M *a*, B *b*, ſint Meridiani, A *m*, B M, Paralleli per loca A, B, tranſeuntes, *a b* Aequator atque A B Loxodromia, eſſe oportet

Fig. 3.

$$\text{B A M} = \Phi\text{, et}$$

$$\text{tang B A M} = \frac{\text{B M}}{\text{A M}} = \text{tang}\,\Phi = \frac{\gamma}{\text{B} - \text{A} + \text{D} - \text{E}} \quad (\S.\ 3.).$$

Proinde quum in hac proiectione ſit B M $= a\,b = \gamma$, ſequitur A M $=$ B $-$ A $+$ D $-$ E. Eſt autem A M $=$ B *b* $-$ A *a*; quare quum linea B *b* non niſi a latitudine loci B $= \beta$, lineaque A *a* a latitudine loci A $= \alpha$ dependere poſſit, quum praeterea logarithmi B, E, ipſius $\beta$, atque logarithmi A, D, ipſius $\alpha$ ſolummodo functiones ſint, concluditur *b* B $=$ B $-$ E, et *a* A $=$ A $-$ D, h. e. data latitudine puncti B $= \beta$, in mappis nauticis generatim fieri oportet

$$b\,\text{B} = l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\beta) - c\,l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ (\S.\ 3.).$$

In Sphaera, ob $c = 0$, erit

$$b\,\text{B} = l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\beta).$$

§. 8. Secundum hanc formulam tabula annexa a me computata eſt ad dena minuta eleuationis poli. Columna ſecunda continet lineam B *b*, ex hypotheſi ſphaerica, ſeu quantitatem $l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\beta)$, tertia eandem lineam dat ex hypotheſi elliptica, ſeu quantitatem

$$l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\beta) - c\,l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

aſſumta ratione axium Newtoniana, ſeu $m = \frac{230}{229}$. Quarta denique columna numeros praebet a numeris tertiae columnae ſubtrahendos, ſi $m$ ponatur $= \frac{200}{199}$. Sic tabula noſtra inſtar trium tabularum peculiarium eſſe poteſt, prout quis circulum vel

vel diverſas ellipſes pro Meridianis aſſumere velit. Omnes autem iſti numeri in partibus radii Aequatoris ſunt expreſſi, unde ſecundum eandem legem longitudines $a\,b$ quoque ſunt exprimendae. Quapropter ſi uni gradui longitudinis in mappa tribuere velimus lineam $n$, et arcus radio aequalis contineat $\nu$ gradus, vt ſit $\nu = 57,2957795\ldots$, erit radius in mappa adhibitus $= n\,\nu$, per quam lineam omnes numeri tabulae ſunt multiplicandi. Haec tabula ſi loco vulgaris tabulae nauticae, quam partes dicunt *Meridionales*, adhibeatur, mappae hydrographicae ſecundum hypotheſin ellipticam haud maiore labore, at multo exactius conſtruentur, quam ſecundum hypotheſin ſphaericam. Omnia quidem Problemata nautica, quae in curſu navis reperiundo verſantur, mappis ex hac tabula conſtructis facile ſolvuntur: at ipſe quoque angulus $\Phi$ tabulae huius ope commodiſſime invenitur per calculum. E columna ſcilicet tertia capiantur lineae $b\,B = p$, et $a\,A = p'$, latitudinibus $\beta$ et $\alpha$ in prima columna reſpondentes: linea $B\,M = \gamma$ ex aliis tabulis ſatis obviis, quae arcus circulares in partibus radii exprimunt, invenitur; unde fit $\text{tang}\,\Phi = \frac{\gamma}{p - p'}$. Ad veram autem lineae $A\,B$ longitudinem, ſeu diſtantiam locorum inveniendam, neque tabula neque mappa ſufficit, ſed peculiari calculo hunc in finem inſtituendo opus eſt. Per conſtructionem ſcilicet eſt $A\,B = \frac{A\,M}{\cos\Phi}$, quum tamen vera Loxodromiae longitudo ſit $= \frac{A\,\beta}{\cos\Phi}$ (Fig. 1. §. 5.). Eſt autem

$$A\,M = \frac{\psi}{a} = \int \frac{\sec^3\mu\,\partial\mu}{m^2 + \text{tang}^2\mu'} \text{ et}$$

$$A\,\beta = \int M\,\mu = m \int \frac{\sec^3\mu\,\partial\mu}{(m^2 + \text{tang}^2\mu)^{\frac{3}{2}}}.$$

T 2 Neceſſe

Neceſſe igitur eſt, ut arcus elliptici A $\beta$ aut calculo integrali, aut ope eiusmodi tabulae, qualem haud ita pridem cum Academia communicaui, quaerantur; atque tum fiet vera diſtantia $= \frac{A\beta}{\cos\psi}$.

§. 9. Priusquam ulterius progrediamur, tribus adhuc verbis methodum vulgarem explicabimus, qua tabulae atque mappae nauticae conſtrui ſolent. Tabula nempe, partes ſic dictas meridionales continens, cuius ope mappas ſuas conſtruunt calculumque perficiunt nautae, nihil aliud eſt niſi termini ſummatorii ſeriei, cuius terminus generalis eſt productum arcus cuiuspiam in ſuam ſecantem: ſecantes ſummari ſolent ad dena minuta. Sic pro latitudine $= 30'$, tabula praebet hanc ſummam:

$$10'. \sec 10' + 20'. \sec 20' + 30'. \sec 30',$$

et ſic porro. Quae quomodo cum formula noſtra conveniant, facile patet. Erat nempe (§. 2.) $\partial\psi = \frac{a \sec^3 \mu \, \partial \mu}{m^2 + \tan^2 \mu}$, quare quum in Sphaera ſit $m = 1$, fit $\frac{\partial\psi}{a} = \sec \mu \, \partial \mu$, et $\psi = a \int \sec \mu \, \partial \mu$. Regrediamur itaque ad Figuram tertiam ubi erat $BM = \psi$, unde ob $a = \tan BAM$, fiet

$$BM. \tan ABM = AM = \int \sec \mu \, \partial \mu - C,$$

quam conſtantem ex ſuperioribus conſtat eſſe $= A a = \int \sec \alpha \, \partial \alpha$. Partes itaque Meridionales $a$M inveniuntur, ſi latitudo $\mu$ puncti M in partes minimas $\partial \mu$ dividatur, eaeque ſingulae in ſecantes ſuas ductae in unam ſummam redigantur: unde patet propoſitum. Caeterum patet, eandem hanc methodum etiam in hypotheſi elliptica poſſe adhiberi. Quum enim ſit in genere $l \tan (45° + \frac{1}{2} \mu) = \int \sec \mu \, \partial \mu$, e ſuperioribus ſequitur fieri debere partes Meridionales

$$b B = \int \sec \beta \, \partial \beta - c \int \sec \varepsilon \, \partial \varepsilon,$$

ubi

ubi arcus $\varepsilon$ determinatur per hanc aequationem: $c \sin\beta = \sin\varepsilon$. Unde patet, quomodo calculus eſſet inſtituendus, ſi vulgaribus tabulis nauticis uti vellemus.

§. 10. Conſtat, partes Meridiani $bB$ in mappa eſſe maiores quam in tellure, quod quoque tabula docet, in qua arcus 50 graduum radio aequatur, cui in tellure tantum arcus 57 graduum fere eſt aequalis. Quum itaque partes Meridiani in hypotheſi elliptica vbique minores ſint quam in ſphaerica, ſequitur, mappas nauticas, ubi ellipticae Meridianorum figurae ratio habetur, veram proportionem magis ſervare quam vulgares, idque eo magis, quo maior aſſumatur ratio axium.

Non inutile mihi videtur, unum exemplum addere, unde differentia utriusque hypotheſeos appareat. Situs itaque ſit locus A ſub latitudine $= 10°$, longitudine $= 315°$, B ſub latitudine $= 60°$, longitudine $= 12°. 17'. 45''$. ita ut ſit $\gamma = 57°. 17'. 45''$, $\alpha = 10°$, $\beta = 60°$, eritque, ob $\gamma = 1$, $p - p' = \cot\Phi$ (§. 8.); unde ex tabula noſtra fiet:

| ſi $m$ | $p - p'$ | $\Phi$ | A $\beta$ | log. diſtantiae A B | diſtantia. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,141532 | 41°. 13'. 8''. | 0,872665 | 0, 0645154 | 997 mill. geogr. |
| $\frac{230}{229}$ | 1,135508 | 41. 22. 9. | 0,869055 | 0, 0637158 | 995,2 - - |
| $\frac{200}{199}$ | 1,134404 | 41. 23. 49. | 0,868511 | 0, 0636293 | 995 - - |

Hinc patet, diſtantiam in Sphaeroide breviorem eſſe quam in Sphaera. Caeterum arcus circuli maximi in Sphaera inter loca A, B, intercepti reperitur $= 981$ mill. geogr.

§. 11. Quum nonnunquam interſit noſſe, in quonam puncto Loxodromia datum Parallelum ſit ſecatura, huic fini

 qui-

quidem inſervire poteſt aequatio ſupra inventa:

$$\frac{\psi}{a} = l.\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\mu) - c\,l.\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\nu) + \text{cet. } (§.\ 3.),$$

poſito $\text{ſin}\,\nu = c\,\text{ſin}\,\mu$; ſi nempe loco $\mu$ ſubſtituatur latitudo Paralleli dati, exinde invenitur $\psi$, h. e. punctum Paralleli, cui Loxodromia occurrit. Haud tamen inutile mihi videtur, aequationem quaerere ad curuam A B (Fig. 1.) inter ternas coordinatas $CN = x$, $NQ = y$, $QM = z$. Quem in finem ponatur $m\,CM = \lambda$, ſimulque notetur, e natura ellipſeos eſſe $\text{tang}\,\mu = m^2\,\text{tang}\,\lambda$; unde habemus

$$\partial.\,\text{tang}\,\mu = \frac{m^2\,\partial\lambda}{\text{coſ}^2\lambda},$$

$$\text{ſec}\,\mu = \sqrt{(1 + m^4\,\text{tang}^2\lambda)}, \text{ et}$$

$$m^2 + \text{tang}^2\mu = m^2\,(1 + m^2\,\text{tang}^2\lambda),$$

quibus valoribus in aequatione

$$\psi = a\int \frac{\text{ſec}\,\mu\ \partial.\,\text{tang}\,\mu}{m^2 + \text{tang}^2\mu} \quad (§.\ 2.)$$

ſubſtitutis, nanciſcimur

$$\psi = a\int \frac{\partial\lambda\,\sqrt{(1 + m^4\,\text{tang}^2\lambda)}}{\text{coſ}^2\lambda\,(1 + m^2\,\text{tang}^2\lambda)}.$$

Quare quum ſit $\text{ſin}\,\lambda = \frac{QM}{CM}$, poſito $CM = u$, fiet $\text{ſin}\,\lambda = \frac{z}{u}$, $\text{coſ}^2\lambda = \frac{u^2 - z^2}{u^2}$, $\text{tang}^2\lambda = \frac{z^2}{u^2 - z^2}$, atque $\partial\lambda = \frac{u\,\partial z - z\,\partial u}{u\sqrt{(u^2 - z^2)}}$, quibus valoribus introductis, aequatio noſtra integralis erit:

$$\psi = a\int \frac{u\,(u\,\partial z - z\,\partial u)\sqrt{(u^2 - z^2 + m^4 z^2)}}{(u^2 - z^2)(u^2 - z^2 + m^2 z^2)}.$$

Eſt autem $u\,u = CM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et e natura ellipſeos eſt $x^2 + y^2 + m^2 z^2 = 1$, unde poſito $m^2 - 1 = n^2$, fit $u\,u = 1 - n^2 z^2$, $u\,\partial u = -n^2 z\,\partial z$, $u^2\,\partial z - u\,z\,\partial u = \partial z$, $u^2 - z^2 = 1 - m^2 z^2$, $u^2 - z^2 + m^4 z^2 = 1 + m^2 n^2 z^2$; quare quum ſit

$$\psi = a\,C\,m = \text{Arc. tang}\,\frac{y}{x},$$

nan-

nanciſcimur hanc aequationem:

$$\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = a\int\frac{\partial z\,\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2)}}{1-m^2 z^2}.$$

Poſterius integrale vocetur $Z$, et ponatur $z^2 = \frac{1}{s^2 - m^2 n^2}$, ut ſit

$$z\,\partial z = \frac{-s\,\partial s}{(s^2 - m^2 n^2)^2},$$

$$1 - m^2 z^2 = \frac{s^2 - m^4}{s^2 - m^2 n^2},$$

$\sqrt{(1 + m^2 n^2 z^2)} = s z$, ideoque

$$\partial Z = \frac{-s^2\,\partial s}{(s^2 - m^4)(s^2 - m^2 n^2)};$$

unde dispeſcendo denominatorem in ſuos factores, erit legitimis factis reductionibus,

$$\partial Z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{s+m^2} - \frac{\partial s}{s-m^2} + \frac{n}{m}\cdot\frac{\partial s}{s-mn} - \frac{n}{m}\cdot\frac{\partial s}{s+mn}\right).$$

Quum itaque ſit $\frac{n}{m} = \sqrt{(1-bb)} = c$, et $mn = m^2 c$, habemus

$$Z = l.\sqrt{\frac{s+m^2}{s-m^2}} + c\,l.\sqrt{\frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}}.$$

Ubi ſi ſubſtituatur $s = \frac{\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2)}}{z}$, erit

$$\sqrt{\frac{s+m^2}{s-m^2}} = \frac{\sqrt{(1-m^2 z^2)}}{\sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} - m^2 z} = \frac{\sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} + m^2 z}{\sqrt{(1-m^2 z^2)}},\ \text{et}$$

$$\sqrt{\frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}} = \frac{1}{\sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} + m^2 c z} = \sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} - m^2 c z.$$

Proinde eſt integrale:

$$\text{Arc. tang}\,\frac{y}{x} = a\,l.\frac{\sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} + m^2 z}{\sqrt{(1-m^2 z^2)}}$$
$$+ a c\,l.\left[\sqrt{(1+m^4 c^2 z^2)} - m^2 c z\right] + \text{Conſt.}$$

Supra invenimus

$$\frac{\psi}{a} = l.\sqrt{\frac{v+1}{v-1}} + c\,l.\sqrt{\frac{v-c}{v+c}}\ (\S.\ 2.),$$

dum hic eſt

$$\frac{\psi}{a} = l.\sqrt{\frac{s+m^2}{s-m^2}} + c\,l.\sqrt{\frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}};$$

unde

unde quo haec ſolutio cum priore conveniat, eſſe oportet

$\frac{v+1}{v-1} = \frac{s+m^2}{s-m^2}$, et $\frac{v-c}{v+c} = \frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}$.

Eſt autem per naturam ellipſeos

$CM^2 = \frac{1}{1+n^2 \sin^2 \lambda}$, ideoque

$z = CM \sin\lambda = \frac{\sin\lambda}{\sqrt{(1+n^2 \sin^2\lambda)}}$, ſeu

$\sin^2\lambda = \frac{z^2}{1-n^2 z^2}$, et $\tan^2\lambda = \frac{z^2}{1-m^2 z^2}$.

Hinc, ob $\tan\mu = m^2 \tan\lambda$, fit $\tan^2\mu = \frac{m^4 z^2}{1-m^2 z^2}$, et

$\operatorname{cosec}\mu = \frac{\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2)}}{m^2 z}$.

Quamobrem quum ſit (§. 2.) $v = \operatorname{cosec}\mu$, et $s = \frac{\sqrt{(1+m^2 n^2 z^2)}}{z}$, ſequitur $v = \frac{s}{m^2}$, vnde concluditur $\frac{v+1}{v-1} = \frac{s+m^2}{s-m^2}$, atque

$\frac{v-c}{v+c} = \frac{s-m^2 c}{s+m^2 c}$, quemadmodum requiritur.

Eleva-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 0°. 10′. | 0,00290889 | 0,00288305 | 0,00000378 |
| 20. | 0581780 | 0576732 | 0755 |
| 30. | 0872676 | 0865104 | 1133 |
| 40. | 1163579 | 1153484 | 1511 |
| 50. | 1454491 | 1441871 | 1888 |
| 1. 0. | 1745418 | 1730275 | 2266 |
| 10. | 2036358 | 2018691 | 2643 |
| 20. | 2327316 | 2307126 | 3021 |
| 30. | 2618294 | 2595581 | 3399 |
| 40. | 2909292 | 2884056 | 3776 |
| 50. | 3200316 | 3172557 | 4153 |
| 2. 0. | 3491368 | 3461086 | 4530 |
| 10. | 3782448 | 3749644 | 4908 |
| 20. | 4073561 | 4038235 | 5286 |
| 30. | 4364708 | 4326860 | 5663 |
| 40. | 4655893 | 4615523 | 6039 |
| 50. | 4947116 | 4904226 | 6418 |
| 3. 0. | 5238381 | 5192970 | 6795 |
| 10. | 5529691 | 5481760 | 7172 |
| 20. | 5821050 | 5770599 | 7549 |
| 30. | 6112454 | 6059483 | 7925 |
| 40. | 6403913 | 6348423 | 8303 |
| 50. | 6695425 | 6637417 | 8680 |
| 4. 0. | 6980995 | 6926469 | 9057 |
| 10. | 7278622 | 7215578 | 9434 |
| 20. | 7570313 | 7504751 | 0,00009809 |
| 30. | 7862069 | 7793991 | 0,00010187 |
| 40. | 8153890 | 8083296 | 0563 |
| 50. | 8445781 | 8372671 | 0939 |
| 5°. 0′. | 0,08737744 | 0,08662119 | 0,00011316 |

 Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 5°. 10′. | 0, 09029780 | 0, 08951041 | 0, 00011692 |
| 20. | 9321896 | 9241244 | 2068 |
| 30. | 9614088 | 9530923 | 2444 |
| 40. | 0, 09906362 | 0, 09820685 | 2820 |
| 50. | 0, 10198721 | 0, 10110532 | 3196 |
| 6. 0. | 0491168 | 0400[illegible]3 | 3571 |
| 10. | 0783704 | 0690494 | 3947 |
| 20. | 1076[illegible]30 | 0980611 | 4322 |
| 30. | 1369054 | 12[illegible]0827 | 4698 |
| 40. | 1661873 | 15[illegible]1133 | 5073 |
| 50. | 1954[illegible]91 | [illegible] | 5449 |
| 7. 0. | 2247811 | 2142064 | 5824 |
| 10. | 2540937 | 24326[illegible]5 | 6199 |
| 20. | 2834169 | 27234[illegible]2 | 6573 |
| 30. | 3127514 | 3014254 | 6947 |
| 40. | 3420965 | 3305203 | 7322 |
| 50. | 3714539 | 359627[illegible] | 7697 |
| 8. 0. | 4008[illegible]24 | 38874[illegible]0 | 8070 |
| 10. | 4302033 | 4178770 | 8444 |
| 20. | 4595962 | 4470201 | 8819 |
| 30. | 4890017 | 4761758 | 9192 |
| 40. | 5184199 | 5053444 | 9565 |
| 50. | 5478514 | 5345264 | 0, 00019939 |
| 9. 0. | 577[illegible]902 | 5[illegible]372[illegible]8 | 0, 00020312 |
| 10. | 6067544 | 5929307 | 0685 |
| 20. | 6362264 | 6221536 | 1059 |
| 30. | 6657127 | 6513908 | 1431 |
| 40. | 6952130 | 6806422 | 1804 |
| 50. | 7[illegible]47282 | 7009086 | 2176 |
| 10°. 0′. | 0, 17[illegible]42583 | 0, 17391900 | 0, 00022548 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 — |
|---|---|---|---|
| 10°. 10′. | 0, 17838030 | 0, 17684864 | 0, 00022920 |
| 20. | 8133636 | 7977983 | 3292 |
| 30. | 8429404 | 8271268 | 3664 |
| 40. | 8725327 | 8564709 | 4035 |
| 50. | 9021413 | 8858314 | 4406 |
| 11. 0. | 9317459 | 9152081 | 4777 |
| 10. | 9614071 | 9446022 | 5148 |
| 20. | 0, 19910604 | 0, 19740132 | 5519 |
| 30. | 0, 20207425 | 0, 20034418 | 5889 |
| 40. | 0504360 | 0328880 | 6259 |
| 50. | 0801472 | 0623520 | 6629 |
| 12. 0. | 1098768 | 0918346 | 7000 |
| 10. | 1396249 | 1213358 | 7369 |
| 20. | 1693915 | 1508556 | 7738 |
| 30. | 1991769 | 1803944 | 8107 |
| 40. | 2289815 | 2099526 | 8477 |
| 50. | 2588056 | 2395304 | 8845 |
| 13. 0. | 2886498 | 2691285 | 9213 |
| 10. | 3185139 | 2987466 | 9581 |
| 20. | 3483983 | 3283852 | 0, 00029949 |
| 30. | 3783033 | 3580446 | 0, 00030317 |
| 40. | 4082293 | 3877252 | 0685 |
| 50. | 4381762 | 4174268 | 1052 |
| 14. 0. | 4681448 | 4471503 | 1419 |
| 10. | 4981351 | 4768957 | 1786 |
| 20. | 5281471 | 5066629 | 2152 |
| 30. | 5581818 | 5364530 | 2518 |
| 40. | 5882388 | 5662656 | 2884 |
| 50. | 6183191 | 5961017 | 3250 |
| 15°. 0′. | 0, 26484227 | 0, 26259613 | 0, 00033616 |

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 — |
|---|---|---|---|
| 15°. 10′. | 0, 26785494 | 0, 26558441 | 0, 00033980 |
| 20. | 7086980 | 6857491 | 4346 |
| 30. | 7388742 | 7156818 | 4710 |
| 40. | 7690732 | 7456375 | 5074 |
| 50. | 7992968 | 7756181 | 5438 |
| 16. 0. | 8295440 | 8056224 | 5802 |
| 10. | 8598190 | 8356547 | 6165 |
| 20. | 8901185 | 8657117 | 6528 |
| 30. | 9204435 | 8957944 | 6890 |
| 40. | 9507950 | 9259039 | 7253 |
| 50. | 0, 29811723 | 9560393 | 7615 |
| 17. 0. | 0, 30115771 | 0, 29862025 | 7978 |
| 10. | 0420085 | 0, 30163924 | 8339 |
| 20. | 0724676 | 0466103 | 8700 |
| 30. | 1029542 | 0768559 | 9061 |
| 40. | 1334685 | 1071294 | 9422 |
| 50. | 1640112 | 1374315 | 0, 00039782 |
| 18. 0. | 1945825 | 1677625 | 0, 00040142 |
| 10. | 2251829 | 1981227 | 0501 |
| 20. | 2558125 | 2285124 | 0861 |
| 30. | 2864715 | 2589317 | 1219 |
| 40. | 3171603 | 2893811 | 1579 |
| 50. | 3478795 | 3198611 | 1937 |
| 19. 0. | 3786291 | 3503717 | 2295 |
| 10. | 4094092 | 3809131 | 2653 |
| 20. | 4402211 | 4114865 | 3010 |
| 30. | 4710639 | 4420910 | 3367 |
| 40. | 5019388 | 4727278 | 3723 |
| 50. | 5328457 | 5033970 | 4080 |
| 20°. 0. | 0, 35637850 | 0, 35340987 | 0, 00044435 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio. ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 20°. 10′. | 0, 35947572 | 0, 35648336 | 0, 00044790 |
| 20. | 6257627 | 5956021 | 5146 |
| 30. | 6568012 | 6264038 | 5500 |
| 40. | 6878734 | 6572394 | 5854 |
| 50. | 7189798 | 6881096 | 6209 |
| 21. 0. | 7501210 | 7190147 | 6562 |
| 10. | 7812967 | 7499547 | 6916 |
| 20. | 8125079 | 7809304 | 7269 |
| 30. | 8437543 | 8119416 | 7621 |
| 40. | 8750365 | 8429888 | 7973 |
| 50. | 9063548 | 8740724 | 8325 |
| 22. 0. | 9377093 | 9051924 | 8676 |
| 10. | 0, 39691014 | 9363504 | 9027 |
| 20. | 0, 40005307 | 9675458 | 9378 |
| 30. | 0319972 | 0, 39987786 | 0, 00049727 |
| 40. | 0635017 | 0, 40300498 | 0, 00050077 |
| 50. | 0950451 | 0613602 | 0427 |
| 23. 0. | 1260204 | 0927087 | 0775 |
| 10. | 1582465 | 1240963 | 1124 |
| 20. | 1899064 | 1555239 | 1471 |
| 30. | 2216059 | 1869915 | 1819 |
| 40. | 2533459 | 2184999 | 2166 |
| 50. | 2851261 | 2500487 | 2513 |
| 24. 0. | 3169472 | 2816388 | 2859 |
| 10. | 3488103 | 3132711 | 3205 |
| 20. | 3807145 | 3449449 | 3551 |
| 30. | 4126606 | 3766608 | 3895 |
| 40. | 4446490 | 4084193 | 4240 |
| 50. | 4766802 | 4402209 | 4583 |
| 25°. 0. | 0, 45087541 | 0, 44720650 | 0, 00054927 |

 Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio. ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 25°. 10′. | 0, 45408713 | 0, 45039539 | 0, 00055271 |
| 20. | 5730328 | 5358867 | 5613 |
| 30. | 6052387 | 5678643 | 5956 |
| 40. | 6374898 | 5998874 | 6298 |
| 50. | 6697856 | 6319555 | 6639 |
| 26. 0. | 7021268 | 6640693 | 6980 |
| 10. | 7345243 | 6962297 | 7320 |
| 20. | 7669477 | 7284363 | 7660 |
| 30. | 7994232 | 7606904 | 8000 |
| 40. | 8319558 | 7929919 | 8339 |
| 50. | 8645302 | 8253405 | 8677 |
| 27. 0. | 897153[illegible] | 8577385 | 9015 |
| 10. | 9298253 | 8901850 | 9352 |
| 20. | 9625451 | 9226801 | 0, 00059690 |
| 30. | 0, 49953149 | 9552254 | 0, 00060026 |
| 40. | 0, 50281339 | 0, 49878203 | 0363 |
| 50. | 0610029 | 0, 50204655 | 0698 |
| 28. 0. | 0939228 | 0531019 | 1033 |
| 10. | 1268935 | 0859095 | 1367 |
| 20. | 1599156 | 1187088 | 1701 |
| 30. | 1929894 | 1515602 | 2035 |
| 40. | 2261156 | 1844643 | 2368 |
| 50. | 2592945 | 2174215 | 2701 |
| 29. 0. | 2925266 | 2504323 | 3033 |
| 10. | 3258124 | 2834970 | 3364 |
| 20. | 3591522 | 3166162 | 3696 |
| 30. | 3925465 | 3497901 | 4025 |
| 40. | 4259955 | 3830192 | 4356 |
| 50. | 4595007 | 4163048 | 4685 |
| 30°. 0′. | 0, 54930614 | 0, 54496462 | 0, 00065013 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio. ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 30°. 10'. | 0, 55266789 | 0, 54830448 | 0, 00065341 |
| 20. | 5603526 | 5165000 | 5669 |
| 30. | 5940841 | 5500134 | 5997 |
| 40. | 6278732 | 5835847 | 6323 |
| 50. | 6617210 | 6172151 | 6649 |
| 31. 0. | 6956272 | 6509043 | 6975 |
| 10. | 7295930 | 6846534 | 7300 |
| 20. | 7636186 | 7184627 | 7624 |
| 30. | 7977043 | 7523326 | 7949 |
| 40. | 8318512 | 7862639 | 8272 |
| 50. | 8660594 | 8202570 | 8595 |
| 32. 0. | 9003291 | 8543119 | 8917 |
| 10. | 9346612 | 8884297 | 9239 |
| 20. | 0, 59690562 | 9226107 | 9560 |
| 30. | 0, 60035145 | 9568554 | 0, 00069881 |
| 40. | 0380369 | 0, 59911646 | 0, 00070201 |
| 50. | 0726236 | 0, 60255385 | 0520 |
| 33. 0. | 1072755 | 0599779 | 0838 |
| 10. | 1419927 | 0944831 | 1157 |
| 20. | 1767762 | 1290550 | 1475 |
| 30. | 2116258 | 1636933 | 1791 |
| 40. | 2465433 | 1984000 | 2108 |
| 50. | 2815280 | 2331743 | 2424 |
| 34. 0. | 3165814 | 2680177 | 2739 |
| 10. | 3517033 | 3029300 | 3054 |
| 20. | 3868946 | 3379121 | 3368 |
| 30. | 4221560 | 3729647 | 3681 |
| 40. | 4574880 | 4080883 | 3994 |
| 50. | 4928909 | 4432832 | 4306 |
| 35°. 0'. | 0, 65283658 | 0, 64785500 | 0, 000746[illegible] |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio. ſi ratio axium = 200 : 199 — |
|---|---|---|---|
| 35°. 10′. | 0, 65639128 | 0, 65138904 | 0, 00074928 |
| 20. | 5995333 | 5493042 | 5239 |
| 30. | 6352267 | 5847913 | 5548 |
| 40. | 6709943 | 6203531 | 5858 |
| 50. | 7068362 | 6559895 | 6166 |
| 36. 0. | 7427549 | 6917032 | 6474 |
| 10. | 7787498 | 7274935 | 6781 |
| 20. | 8148198 | 7633594 | 7088 |
| 30. | 8509668 | 7993026 | 7393 |
| 40. | 8871922 | 8353247 | 7698 |
| 50. | 9234965 | 8714261 | 8003 |
| 37. 0. | 9598798 | 9076070 | 8307 |
| 10. | 0, 69963430 | 9438682 | 8610 |
| 20. | 0, 70328873 | 0, 69802110 | 8913 |
| 30. | 0695124 | 0, 70166350 | 9215 |
| 40. | 1062189 | 0531408 | 9517 |
| 50. | 1430077 | 0897294 | 0, 00079817 |
| 38. 0. | 1798801 | 1264020 | 0, 00080117 |
| 10. | 2168363 | 1631589 | 0417 |
| 20. | 2538771 | 2000008 | 0715 |
| 30. | 2910033 | 2369286 | 1013 |
| 40. | 3282156 | 2739429 | 1310 |
| 50. | 3655144 | 3110442 | 1607 |
| 39. 0. | 4029008 | 3482336 | 1904 |
| 10. | 4403754 | 3855116 | 2199 |
| 20. | 4779386 | 4228786 | 2493 |
| 30. | 5155918 | 4603362 | 2788 |
| 40. | 5533347 | 4978839 | 3081 |
| 50. | 5911686 | 5355230 | 3373 |
| 40°. 0′. | 0, 76290945 | 0, 75732547 | 0, 00083666 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 40°. 10′. | 0, 76671137 | 0, 76110800 | 0, 00083956 |
| 20. | 7052266 | 6489996 | 4247 |
| 30. | 7434332 | 6870133 | 4536 |
| 40. | 7817354 | 7251231 | 4825 |
| 50. | 8201331 | 7633289 | 5114 |
| 41. 0. | 8586276 | 8016320 | 5402 |
| 10. | 8972196 | 8400330 | 5688 |
| 20. | 9359099 | 8785328 | 5975 |
| 30. | 0, 79746990 | 9171319 | 6260 |
| 40. | 0, 80135888 | 9558322 | 6545 |
| 50. | 0525802 | 0, 79946346 | 6892 |
| 42. 0. | 0916723 | 0, 80335381 | 7112 |
| 10. | 1308666 | 0725444 | 7395 |
| 20. | 1701642 | 1116544 | 7677 |
| 30. | 2095662 | 1508694 | 7959 |
| 40. | 2490733 | 1901899 | 8239 |
| 50. | 2886866 | 2296171 | 8519 |
| 43. 0. | 3284068 | 2691516 | 8796 |
| 10. | 3682348 | 3087946 | 9076 |
| 20. | 4081717 | 3485469 | 9353 |
| 30. | 4482180 | 3884091 | 9630 |
| 40. | 4883755 | 4283831 | 0, 00089907 |
| 50. | 5286446 | 4684691 | 0, 00090182 |
| 44. 0. | 5690261 | 5086680 | 0456 |
| 10. | 6095212 | 5489810 | 0730 |
| 20. | 6501309 | 5894092 | 1005 |
| 30. | 6908562 | 6299534 | 1275 |
| 40. | 7316981 | 6706148 | 1546 |
| 50. | 7726577 | 7113944 | 1817 |
| 45°. 0′. | 0, 88137359 | 0, 87522931 | 0, 00092087 |

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio. ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 45°. 10′. | 0, 88549337 | 0, 87933119 | 0, 00092356 |
| 20. | 8962521 | 8344518 | 2625 |
| 30. | 9376924 | 8757142 | 2893 |
| 40. | 0, 89792557 | 9171000 | 3159 |
| 50. | 0, 90209434 | 0, 89586108 | 3425 |
| 46. 0. | 0627557 | 0, 90002467 | 3690 |
| 10. | 1046933 | 0420085 | 3955 |
| 20. | 1467586 | 0838984 | 4218 |
| 30. | 1889523 | 1259173 | 4481 |
| 40. | 2312760 | 1680668 | 4744 |
| 50. | 2737304 | 2103474 | 5004 |
| 47. 0. | 3163161 | 2527599 | 5265 |
| 10. | 3590351 | 2953063 | 5525 |
| 20. | 4018885 | 3379875 | 5784 |
| 30. | 4448773 | 3808048 | 6043 |
| 40. | 4880031 | 4237595 | 6300 |
| 50. | 5312660 | 4668519 | 6556 |
| 48. 0. | 5746685 | 5100844 | 6812 |
| 10. | 6182115 | 5534580 | 7067 |
| 20. | 6618964 | 5969740 | 7321 |
| 30. | 7057241 | 6406334 | 7574 |
| 40. | 7496962 | 6844377 | 7827 |
| 50. | 7938138 | 7283880 | 8078 |
| 49. 0. | 8380785 | 7724800 | 8328 |
| 10. | 8824919 | 8167333 | 8579 |
| 20. | 9270545 | 8611303 | 8828 |
| 30. | 0, 99717688 | 9056796 | 9076 |
| 40. | 1, 00166353 | 9503816 | 9324 |
| 50. | 0616558 | 0, 99952382 | 9570 |
| 50°. 0′. | 1, 01068318 | 1, 00402509 | 0, 00099817 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 50°. 10′. | 1,01521645 | 1,00854208 | 0,00100062 |
| 20. | 1976560 | 1307501 | 0306 |
| 30. | 2433069 | 1762393 | 0549 |
| 40. | 2891196 | 2218909 | 0791 |
| 50. | 3350948 | 2677056 | 1033 |
| 51. 0. | 3812346 | 3136854 | 1274 |
| 10. | 4275407 | 3598322 | 1515 |
| 20. | 4740139 | 4061465 | 1753 |
| 30. | 5206571 | 4526315 | 1991 |
| 40. | 5674707 | 4992874 | 2229 |
| 50. | 6144566 | 5461162 | 2465 |
| 52. 0. | 6616169 | 5931200 | 2701 |
| 10. | 7089531 | 6403002 | 2935 |
| 20. | 7564671 | 6876589 | 3170 |
| 30. | 8041608 | 7351978 | 3403 |
| 40. | 8520344 | 7829172 | 3635 |
| 50. | 9000928 | 8308220 | 3866 |
| 53. 0. | 9483336 | 8789098 | 4097 |
| 10. | 1,09967635 | 9271872 | 4326 |
| 20. | 1,10453809 | 1,09756528 | 4556 |
| 30. | 0941883 | 1,10243089 | 4783 |
| 40. | 1431882 | 0731581 | 5010 |
| 50. | 1923820 | 1222018 | 5235 |
| 54. 0. | 2417721 | 1714424 | 5461 |
| 10. | 2913603 | 2208817 | 5685 |
| 20. | 3411488 | 2705219 | 5909 |
| 30. | 3911394 | 3203648 | 6131 |
| 40. | 4413350 | 3704133 | 6353 |
| 50. | 4917356 | 4206673 | 6573 |
| 55°. 0′. | 1,15423455 | 1,14711313 | 0,00106793 |

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio. ſi ratio axium = 200:199 — |
|---|---|---|---|
| 55°. 10′. | 1, 15931662 | 1, 15218067 | 0, 00107012 |
| 20. | 6441994 | 5726952 | 7230 |
| 30. | 6954479 | 6237996 | 7447 |
| 40. | 7469139 | 6751221 | 7663 |
| 50. | 7985994 | 7266647 | 7879 |
| 56. 0. | 8505061 | 7784291 | 8093 |
| 10. | 9026385 | 8304198 | 8306 |
| 20. | 1, 19549974 | 8826376 | 8518 |
| 30. | 1, 20075853 | 9350851 | 8730 |
| 40. | 0604042 | 1, 19877641 | 8940 |
| 50. | 1134580 | 1, 20406787 | 9151 |
| 57. 0. | 1667480 | 0938301 | 9360 |
| 10. | 2202781 | 1472222 | 9568 |
| 20. | 2740499 | 2008566 | 9775 |
| 30. | 3280650 | 2547349 | 0, 00109980 |
| 40. | 3823278 | 3088617 | 0, 00110187 |
| 50. | 4368422 | 3632405 | 0390 |
| 58. 0. | 4916077 | 4178711 | 0594 |
| 10. | 5466277 | 4727568 | 0796 |
| 20. | 6019070 | 5279024 | 0997 |
| 30. | 6574477 | 5833101 | 1198 |
| 40. | 7132527 | 6389827 | 1397 |
| 50. | 7693253 | 6949235 | 1595 |
| 59. 0. | 8256682 | 7511353 | 1794 |
| 10. | 8822836 | 8076202 | 1990 |
| 20. | 9391772 | 8643839 | 2186 |
| 30. | 1, 29963495 | 9214269 | 2380 |
| 40. | 1, 30538046 | 1, 29787534 | 2575 |
| 50. | 1115470 | 1, 30363678 | 2767 |
| 60°. 0′. | 1, 31695790 | 1, 30942725 | 0, 00112960 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio. ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 60°. 10′. | 1, 32279035 | 1, 31524703 | 0, 00113151 |
| 20. | 2865251 | 2109658 | 3340 |
| 30. | 3454465 | 2697618 | 3530 |
| 40. | 4046720 | 3288625 | 3718 |
| 50. | 4642046 | 3882710 | 3906 |
| 61. 0. | 5240485 | 4479914 | 4092 |
| 10. | 5842069 | 5080269 | 4277 |
| 20. | 6446839 | 5683817 | 4461 |
| 30. | 7054839 | 6290602 | 4645 |
| 40. | 7666106 | 6900659 | 4827 |
| 50. | 8280677 | 7514027 | 5008 |
| 62. 0. | 8898598 | 8130752 | 5188 |
| 10. | 1, 39519907 | 8750871 | 5368 |
| 20. | 1, 40144651 | 1, 39374432 | 5546 |
| 30. | 0772864 | 1, 40001468 | 5723 |
| 40. | 1404607 | 0632041 | 5900 |
| 50. | 2039909 | 1266180 | 6076 |
| 63. 0. | 2678826 | 1903940 | 6251 |
| 10. | 3321401 | 2545364 | 6423 |
| 20. | 3967674 | 3190493 | 6596 |
| 30. | 4617709 | 3839391 | 6768 |
| 40. | 5271553 | 4492104 | 6938 |
| 50. | 5929241 | 5148668 | 7108 |
| 64. 0. | 6590835 | 5809144 | 7276 |
| 10. | 7256388 | 6473586 | 7444 |
| 20. | 7925954 | 7142048 | 7611 |
| 30. | 8599581 | 7814577 | 7776 |
| 40. | 9277332 | 8491237 | 7940 |
| 50. | 1, 49959258 | 9172079 | 8104 |
| 65°. 0′. | 1, 50645414 | 1, 49857157 | 0, 00118266 |



Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 65°. 10′. | 1, 51335872 | 1, 50546544 | 0, 00118428 |
| 20. | 2030683 | 1240291 | 8589 |
| 30. | 2729904 | 1938455 | 8749 |
| 40. | 3433610 | 2641109 | 8907 |
| 50. | 4141861 | 3348316 | 9064 |
| 66. 0. | 4854709 | 4060127 | 9221 |
| 10. | 5572241 | 4776628 | 9376 |
| 20. | 6294504 | 5497867 | 9531 |
| 30. | 7021572 | 6223918 | 9685 |
| 40. | 7753531 | 6954867 | 9838 |
| 50. | 8490438 | 7690770 | 0, 00119989 |
| 67. 0. | 9232371 | 8431706 | 0, 00120139 |
| 10. | 1, 59979404 | 9177749 | 0289 |
| 20. | 1, 60731618 | 1, 59928980 | 0438 |
| 30. | 1489090 | 1, 60685475 | 0584 |
| 40. | 2251900 | 1447315 | 0730 |
| 50. | 3020134 | 2214587 | 0876 |
| 68. 0. | 3793871 | 2987368 | 1021 |
| 10. | 4573192 | 3765739 | 1163 |
| 20. | 5358201 | 4549806 | 1305 |
| 30. | 6148975 | 5339644 | 1446 |
| 40. | 6945609 | 6135350 | 1587 |
| 50. | 7748203 | 6937022 | 1726 |
| 69. 0. | 8556844 | 7744749 | 1865 |
| 10. | 1, 69371640 | 8558637 | 2002 |
| 20. | 1, 70192688 | 1, 69378783 | 2137 |
| 30. | 1020091 | 1, 70205292 | 2272 |
| 40. | 1853956 | 1038270 | 2406 |
| 50. | 2694395 | 1877829 | 2539 |
| 70°. 0′. | 1, 73541516 | 1, 72724076 | 0, 00122670 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 70°. 10′. | 1, 74395436 | 1, 73577130 | 0, 00122802 |
| 20. | 5256268 | 4437102 | 2931 |
| 30. | 6124135 | 5304117 | 3060 |
| 40. | 6999161 | 6178297 | 3187 |
| 50. | 7881476 | 7059774 | 3314 |
| 71. 0. | 8771200 | 7948666 | 3440 |
| 10. | 1, 79668474 | 8845115 | 3564 |
| 20. | 1, 80573429 | 1, 79749253 | 3688 |
| 30. | 1486213 | 1, 80661226 | 3810 |
| 40. | 2406982 | 1581191 | 3931 |
| 50. | 3335859 | 2509271 | 4051 |
| 72. 0. | 4273002 | 3445625 | 4171 |
| 10. | 5218577 | 4390417 | 4289 |
| 20. | 6172744 | 5343809 | 4406 |
| 30. | 7135658 | 6305954 | 4522 |
| 40. | 8107501 | 7277036 | 4638 |
| 50. | 1, 89088445 | 8257225 | 4751 |
| 73. 0. | 1, 90078660 | 1, 89246693 | 4864 |
| 10. | 1078360 | 1, 90245653 | 4976 |
| 20. | 2087706 | 1254265 | 5086 |
| 30. | 3106912 | 2272745 | 5196 |
| 40. | 4136185 | 3301299 | 5304 |
| 50. | 5175707 | 4340109 | 5412 |
| 74. 0. | 6225726 | 5389424 | 5519 |
| 10. | 7286440 | 6449440 | 5624 |
| 20. | 8358094 | 7520403 | 5728 |
| 30. | 1, 99440926 | 8602552 | 5832 |
| 40. | 2, 00535173 | 1, 99696122 | 5934 |
| 50. | 1641088 | 2, 00801368 | 6035 |
| 75°. 0′. | 2, 02758943 | 2, 01918561 | 0, 00126135 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio. ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 75°. 10′. | 2, 03888994 | 2, 03047957 | 0, 00126234 |
| 20. | 5031530 | 4189845 | 6332 |
| 30. | 6186834 | 5344508 | 6428 |
| 40. | 7355202 | 6512243 | 6525 |
| 50. | 8536952 | 7693366 | 6619 |
| 76. 0. | 2, 09732400 | 2, 08888195 | 6712 |
| 10. | 2, 10941878 | 2, 10097061 | 6805 |
| 20. | 2165728 | 1320306 | 6896 |
| 30. | 3404305 | 2558285 | 6986 |
| 40. | 4657979 | 3811369 | 7076 |
| 50. | 5927147 | 5079953 | 7163 |
| 77. 0. | 7212185 | 6364415 | 7250 |
| 10. | 8513520 | 7665182 | 7337 |
| 20. | 2, 19831578 | 2, 18982678 | 7421 |
| 30. | 2, 21166797 | 2, 20317342 | 7505 |
| 40. | 2519663 | 1669661 | 7588 |
| 50. | 3890650 | 3040108 | 7669 |
| 78. 0. | 5280268 | 4429193 | 7749 |
| 10. | 6689029 | 5837429 | 7829 |
| 20. | 8117484 | 7265366 | 7908 |
| 30. | 2, 29566209 | 2, 28713580 | 7985 |
| 40. | 2, 31035791 | 2, 30182658 | 8061 |
| 50. | 2526860 | 1673230 | 8136 |
| 79. 0. | 4040071 | 3185952 | 8210 |
| 10. | 5576092 | 4721491 | 8283 |
| 20. | 7135643 | 6280567 | 8354 |
| 30. | 2, 38719470 | 7863927 | 8425 |
| 40. | 2, 40328354 | 2, 39472351 | 8495 |
| 50. | 1963111 | 2, 41106655 | 8563 |
| 80°. 0′. | 2, 43624605 | 2, 42767703 | 0, 00128630 |

Ele-

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230 : 229 | Correctio ſi ratio axium = 200 : 199 |
|---|---|---|---|
| 80°. 10′. | 2, 45313738 | 2, 44456398 | 0, 00128697 |
| 20. | 7031457 | 6173686 | 8762 |
| 30. | 2, 48778767 | 7920572 | 8826 |
| 40. | 2, 50556721 | 2, 49698109 | 8888 |
| 50. | 2366423 | 2, 51507402 | 8950 |
| 81. 0. | 4209042 | 3349619 | 9011 |
| 10. | 6085827 | 5226010 | 9071 |
| 20. | 7998066 | 7137861 | 9129 |
| 30. | 2, 59947150 | 2, 59086565 | 9186 |
| 40. | 2, 61934557 | 2, 61073600 | 9243 |
| 50. | 3961842 | 3100519 | 9297 |
| 82. 0. | 6030619 | 5168939 | 9353 |
| 10. | 2, 68142665 | 7280634 | 9405 |
| 20. | 2, 70299858 | 2, 69437484 | 9457 |
| 30. | 2504180 | 2, 71641470 | 9508 |
| 40. | 4757755 | 3894716 | 9557 |
| 50. | 7062852 | 6199492 | 9606 |
| 83. 0. | 2, 79421905 | 2, 78558231 | 9653 |
| 10. | 2, 81837526 | 2, 80973545 | 9699 |
| 20. | 4312502 | 3448222 | 9745 |
| 30. | 6849869 | 5985297 | 9789 |
| 40. | 2, 89452850 | 2, 88587994 | 9832 |
| 50. | 2, 92124961 | 2, 91259828 | 9874 |
| 84. 0. | 4870022 | 4004619 | 9915 |
| 10. | 2, 97692123 | 6826458 | 9955 |
| 20. | 3, 00595750 | 2, 99729829 | 0, 00129992 |
| 30. | 3585780 | 3, 02719612 | 0, 00130031 |
| 40. | 6667526 | 5801117 | 066 |
| 50. | 3, 09846849 | 3, 08980207 | 101 |
| 85°. 0′. | 3, 13130131 | 3, 12263264 | 0, 00130136 |

| Elevatio Poli | Partes Meridiani circularis | Partes Meridiani elliptici ſi ratio axium = 230:229 | Correctio ſi ratio axium = 200:199 |
|---|---|---|---|
| 85°. 10′. | 3, 10524449 | 3, 15657364 | 0, 00130169 |
| 20. | 3, 20037608 | 3, 19170312 | 201 |
| 30. | 3, 23678250 | 3, 22810750 | 231 |
| 40. | 3, 27456027 | 3, 26588331 | 261 |
| 50. | 3, 31381691 | 3, 30513807 | 290 |
| 86. 0. | 3, 35467357 | 3, 34599291 | 317 |
| 10. | 3, 39726625 | 3, 38858385 | 343 |
| 20. | 3, 44174982 | 3, 43306576 | 368 |
| 30. | 3, 48830014 | 3, 47961449 | 393 |
| 40. | 3, 53711922 | 3, 52843205 | 416 |
| 50. | 3, 58844002 | 3, 57975141 | 438 |
| 87. 0. | 3, 64253332 | 3, 63384334 | 458 |
| 10. | 3, 69971646 | 3, 69102518 | 477 |
| 20. | 3, 76036433 | 3, 75167183 | 496 |
| 30. | 3, 82492473 | 3, 81623108 | 513 |
| 40. | 3, 89393810 | 3, 88524338 | 529 |
| 50. | 3, 96806511 | 3, 95936939 | 544 |
| 88. 0. | 4, 04812550 | 4, 03942885 | 558 |
| 10. | 4, 13515303 | 4, 12645553 | 572 |
| 20. | 4, 23047800 | 4, 22177973 | 583 |
| 30. | 4, 33585190 | 4, 32715292 | 594 |
| 40. | 4, 45364693 | 4, 44494732 | 603 |
| 50. | 4, 58718894 | 4, 57848878 | 613 |
| 89. 0. | 4, 74134985 | 4, 73264921 | 619 |
| 10. | 4, 92367807 | 4, 91497702 | 625 |
| 20. | 5, 14682796 | 5, 13812658 | 631 |
| 30. | 5, 43451506 | 5, 42581342 | 635 |
| 40. | 5, 83998315 | 5, 83128132 | 637 |
| 50. | 6, 53313244 | 6, 52443050 | 0, 00130639 |
| 90°. 0′. | Infinit. | Infinit. | |

Re-

# REFLEXIONS
## SUR
# LES LOGARITHMES IMAGINAIRES.

Par

*F. T. SCHVBERT.*

*Preſenté à l'Académie le* 28 *Janvier* 1790.

## §. 1.

Il n'y a aucun Mathematicien, qui ne connoiſſe la diſpute célèbre agitée rélativement aux Logarithmes des nombres négatifs, entre deux des plus grands Geomètres, M. M. Leibnitz & Jean Bernoulli, dont celui-là ſoutint que les Logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires, tandis que celui-ci prétendit qu'ils étoient non ſeulement réels mais les mêmes que ceux des nombres affirmatifs. L'un & l'autre de ces deux ſavans appuya ſon ſentiment ſur des raiſons ſi fortes, & trouva tant de contradictions dans le ſentiment oppoſé, que de quelque parti qu'on ſe déclara, on rencontra des difficultés qu'il ne ſembloit guéres poſſible de ſurmonter. On a donc beaucoup d'obligations à M. Léonard Euler, pour avoir decidé à la ſatisfaction de tous les connoiſſeurs cette diſpute qui avoit même rendu ſuſpectes toutes les Mathematiques pures, & pour en avoir ſelon ſa coûtume levé heureuſement toutes les difficultés. Dans un mémoire inſeré dans *l'Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences & belles lettres de Berlin* pour l'an-

 nee

née 1749, ce grand Geomètre decide la queſtion en faveur de M. Leibnitz, en montrant, qu'à chaque nombre, poſitif ou négatif, réel ou imaginaire, repond une infinité de Logarithmes, mais avec cette difference, que tous ces Logarithmes ſont imaginaires, ſi le nombre eſt négatif ou imaginaire, & que chaque nombre affirmatif, qui n'a qu'un ſeul Logarithme réel, a en outre une infinité de Logarithmes imaginaires. Il fait voir enſuite, que cette theorie des Logarithmes eſt parfaitement d'accord avec toutes les opérations qui renferment de ces quantités tranſcendentes, & que toutes les difficultés dont il eſt queſtion, s'évanouiſſent entierement, pourvû qu'on n'oublie pas qu'à chaque nombre repond une infinité de Logarithmes imaginaires.

§. 2. Cette diſpute paraiſſant ainſi terminée, j'ai été ſurpris de lire dans les *Memoires de la Societé Italienne* (*), que M. Riccati renverſe tout d'un coup les raiſonnemens de M. Euler, en avançant, que tous les Logarithmes, tant ceux des nombres affirmatifs que des nombres négatifs, trouvés par la methode de M. Euler, ſont également imaginaires. Les reflexions occaſionnées par cet ingénieux mémoire m'ayant cependant toujours plus convaincu de la ſolidité des raiſonnemens de ce grand Mathématicien, je prends la liberté de les communiquer à l'Académie, puisque la moindre difficulté dans cette matiere eſt de la derniere importance. Je tâcherai de faire voir, 1) que la demonſtration de M. Riccati ne prouve point la verité de ſon Theorème, & qu'il eſt au contraire indubitable, que le zero imaginaire ne diffère en rien du zero réel; 2) que les raiſons desquelles M. Euler déduit ſa Théorie

(*) *Memorie di Matematica e Fiſica della Società Italana*, Tomo IV. Teorema: *Il Nulla immaginario non può confonderſi col reale.* Pag. 116. ſeqq.

rie des Logarithmes, ſont auſſi ſolides qu'on les peut attendre de la part d'un ſi grand génie.

§. 3. Comme les formules que M. Euler trouve pour les Logarithmes, ſe reduiſent aux ſuivantes:

$$l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}, \ \& \ l(-1) = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

M. Riccati ſe propoſe de prouver la fauſſeté de cette propoſition: $0\sqrt{-1} = 0$, d'où il conclut, que d'après la méthode de M. Euler tous les Logarithmes des nombres affirmatifs ſeroient auſſi imaginaires, quand même on ſuppoſeroit $\lambda = 0$, parcequ'on n'eſt pas autoriſé de confondre le zero imaginaire & le zero réel. Il le démontre à l'aide de la courbe que les anciens appellérent la Conchoide, & qui ſe forme, comme on ſait, de la maniere ſuivante: Qu'on coupe la ligne droite A E par un autre A C perpendiculairement, & qu'on determine dans celle-ci un point C. Or ſi l'on trace une ligne quelconque C E qui rencontre la ligne A E au point E, & qu'on faſſe $EM = Em =$ à une ligne donnée A B, les points M, $m$, ſeront dans la Conchoide. En poſant donc $AB = AD = a$, $AC = c$, $AP = x$, $PM = y$, on a $PM : PE = AC : AE$, c'eſt à dire, Tab. III. Fig. 1.

$$y : \sqrt{(a^2 - y^2)} = c : x + \sqrt{(a^2 - y^2)};$$

partant

$$x = \frac{(c - y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}.$$

Statuons maintenant $y = AC = c$, & nous aurons $x = 0\sqrt{(a^2 - c^2)}$. Si donc le point C eſt au delà du point B, ou que $c > a$, on a $x = 0\sqrt{(c^2 - a^2)}\sqrt{-1}$. Or M. Riccati raiſonne ainſi: le point C n'étant pas dans la courbe, dans le cas que nous venons de conſidérer, il faut que la valeur trouvée de $x$ ſoit imaginaire; il eſt donc abſolument faux que $0\sqrt{-1} = 0$, mais $0\sqrt{-1}$ eſt toujours une quantité imaginaire.

 §. 4.

§. 4. Avant que d'examiner la demonſtration même de M. Riccati je remarquerai que la concluſion qu'il en déduit, n'eſt pas fondée. Un ſeul exemple ne ſauroit demontrer, que $0\sqrt{-1}$ ſoit toujours une quantité imaginaire, mais tout au plus, que cette formule peut avoir quelquefois une valeur imaginaire. Pour juſtifier le raiſonnement de M. Euler, il ſuffira donc d'oppoſer d'autres cas, où il ſoit vrai que $0\sqrt{-1}=0$. Cela fait, il ſeroit encore queſtion de ſavoir, laquelle de ces deux valeurs il faut admettre dans le cas qui a été l'objet des recherches de M. Euler. Je produirai donc un cas mémorable, qui ne diffère presque en rien du cas propoſé, comme je ferai voir dans la ſuite, & dans lequel il eſt hors de doute que $0\sqrt{-1}=0$. On ſait, que tous les facteurs doubles de la fonction $p^n - q^n$ ſont contenus ſous cette forme:

$$p^2 - 2pq \operatorname{coſ}\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2,$$

laquelle peut encore être decompoſée en ces facteurs ſimples

$$p - q\left(\operatorname{coſ}\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \operatorname{ſin}\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right).$$

Or poſant $\lambda = 0$, le facteur double devient

$$p^2 - 2pq + q^2 = (p-q)^2,$$

d'où il ſuit, que les deux facteurs ſimples ſont $= p - q$. Mais l'expreſſion générale du facteur ſimple eſt pour ce cas $p - q(1 \pm 0\sqrt{-1})$; donc à fin que ce ſoit égal à $p - q$, il doit être $0\sqrt{-1} = 0$.

§. 5. Paſſons maintenant à la demonſtration de M. Riccati, qui détruiroit ſans doute tous les raiſonnemens de M. Euler, ſi elle prouvoit que $0\sqrt{-1}$ ait *toujours* une valeur imaginaire. Car la formule de M. Euler: $l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, donnant une infinité de Logarithmes imaginaires & un ſeul Logarithme réel $= 0$, ſuppoſe que $0\sqrt{-1} = 0$,

il

il eſt vrai qu'on pourroit dire, que la propoſition de M. Riccati ne demontre autre choſe ſi non que ce Logarithme eſt auſſi imaginaire, ou que le nombre des Logarithmes imaginaires de $+ 1$ doit être augmenté de l'unité, ce qui donneroit de même leur nombre $= \infty$. On pourroit encore dire, que comme il eſt d'ailleurs connu, que chaque nombre affirmatif a du moins un Logarithme réel, il eſt indubitable malgré l'objection de M. Riccati, que tout nombre affirmatif a une infinité de Logarithmes imaginaires & un ſeul Logarithme réel. Mais auſſi on ne peut nier, que cela prouveroit du moins la fauſſeté des raiſonnemens de M. Euler, quoique la concluſion qu'il en tire, ne fut pas détruite; car puisqu'il a établi, que l'expreſſion $2 \lambda \pi \sqrt{-1}$ eſt une formule *générale* qui renferme tous les Logarithmes de l'unité, il s'enſuit, que l'unité n'a que des Logarithmes imaginaires, ſi $0 \sqrt{-1}$ a une valeur impoſſible. Or comme l'unité a ſans doute un Logarithme réel, ſes raiſonnemens conduiroient à une concluſion fauſſe. On en tireroit encore la conſequence, que dans ce cas les nombres négatifs pourroient auſſi avoir un Logarithme réel, & M. Euler n'auroit pas demontré ce qu'il s'étoit propoſé.

§. 5. Il me ſemble donc valoir la peine d'examiner rigoureuſement, ſi cette circonſtance tirée de la nature de la Conchoide prouve en effet la valeur imaginaire de l'expreſſion $0 \sqrt{-1}$; & j'avouerai, qu'à mon avis elle prouve tout le contraire, & qu'en ce cas même l'abciſſe $x$ ne peut pas avoir d'autre valeur que celle-ci $x = 0$. En effet il eſt certain, que le point C étant le *pole* de la Conchoide eſt une partie de la courbe, puisqu'il eſt evident par ſa generation, qu'elle ne ſauroit être décrite ſans le point C, le point M de la Conchoide étant pris ſur la ligne C E, en faiſant E M

=

$= AB$, & que le point C eſt le plus ſouvent (ſavoir ſi $c \leqq a$) ſitué actuellement dans l'arc de la courbe. Il s'agit ici de trouver, en quels points la ligne CD rencontre la courbe, ou de determiner les valeurs de l'appliquée $y$ au cas que $x = 0$. En mettant donc $x = 0$, on trouve $y = \pm a$, et $y = c$, dont les deux valeurs premieres determinent les points B, D, & la troiſieme valeur donne le point C. Pour l'expoſer dans tout ſon jour, il faut rendre l'equation rationelle d'après la methode vulgaire. Ainſi nous aurons

$$y^4 - 2cy^3 + (x^2 + c^2 - a^2)y^2 + 2a^2cy - a^2c^2 = 0,$$

dont les racines, ſi $x = 0$, ſeront 1) $y = \pm a$. Pour trouver les autres racines, il faudra diviſer l'equation par $y^2 - a^2 = 0$, par où l'on aura

$$y^2 - 2cy + c^2 = 0 = (y - c)^2,$$

partant $y = c$, & il ne paroît point, que cette valeur ſoit imaginaire, ſi $c > a$. On ne peut donc douter que $x = 0$, ſi $y = c$, d'où il ſuit que $0\sqrt{-1} = 0$.

§. 7. Il eſt vrai, que dans le cas où $y = c$ & $c > a$, il y a $x = 0\sqrt{-1}$, & qu'il ne faut pas tout à fait négliger le facteur imaginaire $\sqrt{-1}$; c'eſt pourquoi il ne ſera pas hors de propos de dire quelques mots pour determiner la juſte valeur du produit $0\sqrt{-1}$. Le facteur $\sqrt{-1}$ nous fait voir, que pour peu que la valeur de $y = c$ ſoit changée, l'abſciſſe $x$ ſera imaginaire, ſavoir $x = \alpha\sqrt{-1}$; c'eſt à dire, qu'à la verité le point C eſt dans la Conchoide, mais qu'il appartient à une branche de la courbe, dans laquelle toutes les appliquées ſont imaginaires, hormis celle qui repond à l'abſciſſe $x = 0$, qu'ainſi cette branche s'eſt perdue dans un point, ou que C eſt un *point iſolé* (*punctum conjugatum*); ce qui eſt parfaitement d'accord avec la nature de la Conchoide.

Car

Car il faut ſe ſouvenir, que ſon équation contient quatre valeurs de la quantité $y$, ou qu'elle a quatre branches, dont deux ſont determinées par le facteur $y^2 - a^2 = 0$, & les deux autres par le facteur qui devient $(y - c)^2 = 0$, ſi $x = 0$. Quand il y a $c < a$, la Conchoide a un noeud, tel que la Fig. 2. le repreſente. La ligne $c$ croiſſant, le point C approche du point B, ce noeud devient moindre; il s'évanouit, ſi $c = a$, & le point C ſe confond avec le point B; enfin il devient un point iſolé C, ſi $c > a$, comme dans la Fig. 1. Puisqu'il eſt donc evident, que le point C appartient dans tous ces cas à la courbe, & qu'il ſe trouve toujours dans la ligne A C, il faut que dans le cas où $y = c$ on ait toujours $x = c$. Mais dans le ſeul cas où $c > a$, l'équation doit être d'une telle forme, que la quantité variable $x$ devienne imaginaire, auſſitôt que la valeur $y = c$ ſubit un changement infiniment petit. Je dis, infiniment petit, parceque d'ailleurs l'appliquée $y$ n'appartiendroit pas à la même branche dans laquelle ſe trouve le point C, & qui s'eſt évanouie en un point iſolé. Et c'eſt ce juſtement que veut dire l'expreſſion $x = 0\sqrt{-1}$.

§. 8. Toutes les fois donc, que pour une certaine valeur de l'appliquée $y$ on trouve $x = 0\sqrt{-1}$, cela demontre, que le point correſpondant eſt un point iſolé ou conjugué. Suppoſons, qu'on veuille définir la ſituation d'un point C rélativement à l'axe A B, il faudra dire, qu'en prenant Fig. 3.
l'abſciſſe égale à A B $= a$, l'appliquée deviendra $=$ B C $= c$, ou que généralement pour $x = a$ on aura $y = c$. Mais pour diſtinguer le point d'avec une ligne quelconque qui paſſe par ce point, il faut qu'à toute autre abſciſſe A P reponde une ordonnée imaginaire. On a donc d'abord $x - a = y - c$; mais c'eſt une équation, à laquelle ſatisfait toute ligne droite qui paſſe par le point C & qui coupe l'axe A P ſous un an-

 gle

gle de 45°. Car ſoit M E une telle ligne, on a, à cauſe de l'angle $E = 45°$, $BC = EB$, ou $AE = BC - AB = c - a$, et $PM = y = EP = x + c - a$, c'eſt à dire, $y - c = x - a$. Donc pour que l'équation ne contienne que le point C, il faut qu'elle donne pour toute autre valeur hormis $y = c$, une valeur imaginaire pour l'abſciſſe $x$; partant elle doit avoir cette forme, $x - a = (y - c)\sqrt{-1}$.

§. 9. Puisqu'on peut enviſager le point comme un cercle d'un rayon qui s'eſt évanoui, ſoit C le centre d'un cercle donné, dont le rayon $CM = b$; ſoit $AB = a$, $BC = c$, $AP = x$, $PM = y$, & nous aurons $CM^2 = CD^2 + DM^2$ c'eſt à dire, $b^2 = (a - x)^2 + (y - c)^2$, & pour le point C, ou $b = 0$, $(x - a)^2 = -(y - c)^2$, partant $x - a = (y - c)\sqrt{-1}$. C'eſt donc, pour ainſi dire, l'équation générale pour le point geometrique, & ſi l'équation d'une courbe donne pour une certaine valeur de $y$ cette expreſſion, $x = a + 0\sqrt{-1}$, cela fait voir, que la courbe a un point iſolé pour l'abſciſſe $x = a$. Les valeurs des coordonnées pour ce point ne ſont pas imaginaires, mais elles appartiennent à une ſerie infinie de valeurs, qui toutes ſont imaginaires à la reſerve d'une ſeule. Il eſt eſſentiel de ne jamais oublier cette régle, lorsqu'on parvient à une expreſſion de la forme ſuivante: $x = a + 0\sqrt{-1}$.

§. 10. Celà ſuffira, à ce qui me ſemble, pour montrer, que le zero imaginaire eſt veritablement un zero réel, mais que neanmoins l'expreſſion $0\sqrt{-1}$ ſignifie quelque choſe de plus que le ſimple zero. Pour le rendre encore plus evident, je remarquerai, que cette expreſſion $0\sqrt{-1}$, à laquelle on eſt parvenu par le calcul, reſulte toujours d'une telle forme $Z\sqrt{-1}$, Z étant une telle fonction de la variable $z$, qui s'évanouit ſi l'on donne à la lettre $z$ une valeur deter-

determinée $= a$, d'où il ſuit, que Z doit avoir cette forme $(z^n - a^n)^m$; partant ſi $z = a$, nous obtiendrons

$$Z\sqrt{-1} = (a^n - a^n)^m \sqrt{-1}.$$

Or il eſt indubitablement $a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, quelle que ſoit la valeur de $\sqrt{-1}$; on a donc $a^n\sqrt{-1} - a^n\sqrt{-1} = 0$, & $0\sqrt{-1} = 0$, parceque cette expreſſion ſe reduit toujours à une autre de cette forme $(a - a)\sqrt{-1}$. Ainſi nous avons trouvé dans la Conchoide $x = \frac{(c - y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$; or ſi $y = c$ et $c > a$, cette expreſſion deviendra $x = \frac{(c - c)\sqrt{(a^2 - c^2)}}{c}$, ou en ſubſtituant $\sqrt{(c^2 - a^2)} = C$, $x = C\sqrt{-1} - C\sqrt{-1} = 0$, comme nous venons de demontrer.

§. 11. Puisqu'on ne ſauroit être trop clair ſur cette matiere, je remarquerai encore, qu'on peut enviſager cet objet ſous une autre face. Le zero & l'infini ne peuvent jamais exiſter; ce ſont des choſes impoſſibles, auſſi bien que les quantités imaginaires $\sqrt{-1}$ (*). Or il n'eſt pas abſurde d'admettre une valeur réelle d'un produit de deux quantités impoſſibles, comme $0\sqrt{-1}$, non plus que de celles $0\,\infty$ ou $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1}$. Mais pour determiner la valeur actuelle d'un tel produit, il faut remonter au ſens primitif de ces ſignes. Comme l'équation $x = 0$ veut dire, qu'on ne ſauroit prendre $x$ aſſés petite pour qu'elle ſatisfaſſe au Problème, & $x = 0 . a$, qu'il n'y a point de nombre aſſés petit, qui multiplié par $a$ produiſe la quantité $x$; ainſi l'expreſſion $x = 0\sqrt{-1}$ ne ſignifie autre choſe, ſi non que nul facteur, quelque petit qu'il ſoit, ne ſauroit être tel, qu'étant multiplié par l'imaginaire $\sqrt{-1}$, il pût produire la quantité $x$; ou ce

 qui

(*) Voy. l'excellent mémoire de *M. l'Abbé de Caluſo, du Calcul différentiel & des fluxions*, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*, pour les années 1786 & 1787.

qui revient au même, cette expreſſion ſynonime $\frac{x}{0}$ ou $x.\infty = \sqrt{-1}$, veut dire, qu'il n'y a point de facteur, quelque grand qu'il ſoit, qui étant multiplié par la quantité $x$, pût produire une quantité imaginaire $\sqrt{-1}$: d'où il ſuit ſans doute, que $x = 0$, ou du moins qu'elle n'a pas une valeur imaginaire.

§. 12. Il reſte encore à appliquer ce que nous venons de dire, à la demonſtration que M. Euler a donnée de ſa Theorie des Logarithmes. Il trouve cette expreſſion générale: $l(+1) = 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, de laquelle ſi $\lambda = 0$ l'on déduit $l(+1) = 0\sqrt{-1}$. Or comme j'ait fait voir, qu'une telle expreſſion $y = 0\sqrt{-1}$ indique toujours, que $y$ appartient à une infinité de valeurs, qui toutes ſont imaginaires à l'exception d'une ſeule qui eſt $y = 0$; il s'enſuit d'abord, que chaque nombre poſitif a un ſeul Logarithme réel, mais une infinité de Logarithmes imaginaires. C'eſt ce que M. Euler demontre de la manière ſuivante: Poſant $l(+1) = y$, on a $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$, $n$ étant un nombre infini. Or le facteur général de cette equation eſt

$$(1 + \tfrac{y}{n})^2 - 2(1 + \tfrac{y}{n})\,\mathrm{coſ}\,\tfrac{2\lambda\pi}{n} + 1,$$

qui dans le cas où $\lambda = 0$ devient $(1 + \frac{y}{n} - 1)^2$, d'où l'on conclud que $\frac{y}{n} = 0$, ou bien $y = 0.n$. Il eſt vrai, que la valeur de $y$ paroît encore indeterminée, parceque $n = \infty$; mais il ſuit du moins, que cette valeur de $y$ eſt réelle, parceque $n$ eſt bien un nombre infini mais non pas imaginaire, & que le produit $0.\infty$ ne ſauroit jamais être imaginaire. La valeur de $y$ eſt donc réelle, ſi $\lambda = 0$; mais dans ce même cas il eſt $y = 0\sqrt{-1}$; partant l'expreſſion $0\sqrt{-1}$ a une valeur réelle, qui ne peut être que celle $y = 0$.

Les facteurs ſimples de l'équation $(1 + \frac{y}{n})^n - 1 = 0$, ſont

$$1 + \frac{y}{n} - (\text{coſ}\,\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \text{ſin}\,\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}) = 0,$$

ou à cauſe de $n = \infty$,

$$1 + \frac{y}{n} - 1 + \frac{2\lambda^2\pi^2}{n^2} - \text{cet.} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1} \pm \text{cet.}$$
$$= \frac{y}{n} \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1} = 0,$$

parceque les autres termes ſont diviſées par des puiſſances d'un expoſant plus grand de $n = \infty$. On a donc généralement $y \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1} = 0$, ou bien $y = \mp 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, & lorsque $\lambda = 0$, $y = 0\sqrt{-1}$. Or j'ai demontré en particulier (§. 4.), que dans le facteur général

$$p - q\,(\text{coſ}\,\Phi \pm \text{ſin}\,\Phi\sqrt{-1})$$

de la fonction $p^n - q^n$, on a $\text{ſin}\,\Phi\sqrt{-1} = 0$, ſi $\Phi = 0$. D'où il ſuit, que tout au moins dans ce cas qui a été l'objet de recherches de M. Euler, il eſt $0\sqrt{-1} = 0$; partant une des valeurs de $l(+1)$ eſt $= 0$, toutes les autres étant imaginaires.

DE

# DE NOVIS QVIBVSDAM CAVSTICAE PARABOLAE PROPRIETATIBVS.

Auctore
*NICOLAO FVSS.*

*Conuent. exhib. die 26 Ian.* 1792.

§. 1.

Iam ſeptem vltra ſaeculum anni ab eo tempore elapſi ſunt, quo celeberrimus Tſchirnhaus, primus Curuarum cauſticarum inuentor, harum linearum praecipuas proprietates inueſtigauit. Poſt eum ſagaciſſimus Geometra Baſilienſis, Iohannes Bernoulli, plurimum in hoc argumento occupatus fuit. Quinimo qui poſt eum inclaruêre Geometriae principes, de perficienda vniuerſa Theoria Curuarum ſolliciti, etiam iſtam Geometriae ſublimioris partem inuentis numero et pondere claris locupletarunt. Nihilo vero minus multae ſane adhuc latent affectiones harum curuarum ſingulares, quas noſſe nec vanum nec iniucundum foret, praeterquam quod ad ſcientiam augendam ornandamque conferret. Quum igitur nuper, in ſolutione Problematis ex methodo tangentium inuerſa occupatus, in aliquot proprietates Cauſticae Parabolae incidiſſem, dubius, an quisquam alius earum iam mentio fecerit, has proprietates, vna cum aliis obſeruationibus, cum propoſito argumento arctiori vinculo connexis, hic exponere in animum induxi. Quanquam

quam enim huiusmodi disquiſitiones parum arridere videntur plerisque Geometrarum noſtri aevi, non deerunt tamen, quibus breuis excurſio in derelictam quaſi Geometriae prouinciam eo minus diſplicebit, ſi egregiis proprietatibus huius curuae, iam olim a Geometris detectis, aliquid addere nonnullaque emendare nobis contigerit.

§. 2. Prius autem quam propoſitum argumentum aggredior, haud abs re erit generale Curuarum cauſticarum, ex reflexione radiorum parallelorum natarum, Problema reſoluiſſe. Formulas porro inde natas ad Parabolam vulgarem referam, ponendo ſcilicet radios incidentes axi normales. Proprietates deinde praecipuas huius curuae ex relatione coordinatarum deriuabo. Quomodo porro eas, de quibus hic potiſſimum ſermo eſt, per methodum tangentium inuerſam eruere liceat, oſtendam, quo ſimul pateat, vtrum hae proprietates etiam aliis lineis curuis competant, an vero ſoli Cauſticae Parabolae. Denique ipſius Problematis, quod hisce disquiſitionibus anſam praebuit, ſolutionem tradam.

## Problema generale.

§. 3. *Si ex puncto lucido infinite remoto radii axi A B normales incidant in lineam curuam quamcunque A M N, determinare lineam catacauſticam a radiis reflexis formatam.* Tab. IV. Fig. 1.

## Solutio.

Sit arcus curuae propoſitae $AM = s$, et angulus incidentiae $AMR = \Phi$, erit pro radio proximo $rm$ arculus $Mm = \partial s$ et angulus $Amr = \Phi + \partial \Phi$; ex natura autem reflexionis ſequitur fore angulum $ZMN = AMR = \Phi$. Tum vero ob angulum $MZm = Msm - rmZ$, nec non $Msm = RMZ$, ſequitur fore $MZm = RMZ - rmZ$. Eſt vero

RMZ

$$R M Z = 180 - A M R - Z M N = 180^\circ - 2 \Phi \text{ et}$$

$$R M Z - r m Z = \partial . R M Z = - 2 \partial \Phi ,$$

vbi ſignum — tantum indicat concauam ſupponi verſus axem curuam radios incidentes reflectentem, ita vt, nullo reſpectu ad ſignum habito, ſtatui queat $M Z m = 2 \partial \Phi$. Ex triangulo autem $M Z m$ colligitur longitudo radii reflexi

$$M Z = \frac{M m \text{ ſin. } M m Z}{\text{ſin. } M Z m} = \frac{\partial s \text{ ſin. } \Phi}{2 \partial \Phi} .$$

Pro inueſtigandis iam coordinatis curuae catacauſticae, referatur punctum eius Z ad axem A B, voceturque abſciſſa $A X = X$ et applicata $X Z = Y$, exiſtentibus pro curua data coordinatis $A P = x$, $P M = y$, eritque in triangulo M Q Z rectangulo

$$Q Z = M Z \text{ ſin. } Q M Z = \frac{\partial s \text{ ſin. } \Phi \text{ ſin. } 2 \Phi}{2 \partial \Phi} ;$$

$$Q M = M Z \text{ coſ. } Q M Z = - \frac{\partial s \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } 2 \Phi}{2 \partial \Phi} ;$$

conſequenter

$$X = A P + Q Z = x + \frac{\partial s \text{ ſin. } \Phi \text{ ſin. } 2 \Phi}{2 \partial \Phi} ;$$

$$Y = P M - Q M = y + \frac{\partial s \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } 2 \Phi}{2 \partial \Phi} .$$

Cum denique conſtet omnem Cauſticam eſſe rectificabilem, videamus quaenam ſit arcus indefiniti A Z longitudo. Hunc in finem notetur eſſe radium reflexum proximum $m z = M Z + \partial . M Z$; ducto autem arculo $m v$ erit $Z v = M Z - M v$ et $Z z = \partial . A Z = m z - m Z = m z - v Z = \partial . M Z + M v$. Eſt vero $M v = \partial s \text{ coſ. } \Phi = m u = \partial . P M$, ideoque $\partial . A Z = \partial . M Z + \partial . P M$, et integrando $A Z = M Z + P M$, ſtatuendo ſcilicet initium in A. Arcus igitur Cauſticae aequatur ſummae radiorum incidentis et reflexi.

Pro-

## Problema ſpeciale.

§. 4. *Si ex puncto lucido infinite remoto radii* $RM$, $rm$, *axi* $AB$ *normales, incidant in Parabolam* $AMN$, *determinare Catacauſticam ab iis formatam.*

## Solutio.

Sit ſemiparameter Parabolae $= p$, ita vt $y = \surd 2px$; et cum in triangulo characteriſtico $Mmu$ ſit tang. $Mmu = \frac{Mu}{mu}$, hoc eſt tang. $\Phi = \frac{\partial x}{\partial y}$, ob $x = \frac{yy}{2p}$, erit tang. $\Phi = \frac{y}{p}$, ex quo valore ſequentes colliguntur:

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{y}{\surd(pp+yy)};\ \text{ſin.}\ 2\Phi = \frac{2py}{pp+yy},$$

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{p}{\surd(pp+yy)};\ \text{coſ.}\ 2\Phi = \frac{pp-yy}{pp+yy}.$$

Porro indidem differentiando prodit

$$\partial.\,\text{tang.}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2} = \frac{\partial y}{p},$$

hincque $\partial\Phi = \frac{p\,\partial y}{pp+yy}$. Denique erit elementum arcus:

$$\partial s = \surd(\partial x^2 + \partial y^2) = \frac{\partial y}{p}\surd(pp+yy),$$

quibus ſubſtitutis ambae coordinatae curuae catacauſticae quaeſitae erunt

$$X = x + \frac{yy}{p} = \frac{3yy}{2p},$$

$$Y = y + \frac{y(pp-yy)}{2pp} = \frac{y(3pp-yy)}{2pp}.$$

Cum autem ſit $X = \frac{3yy}{2p}$, erit $y = \surd\frac{2}{3}pX$, vnde fit

$$Y = \pm\left(\tfrac{3}{2} - \frac{X}{3p}\right)\surd\tfrac{2}{3}pX,$$

cuius aequationis admodum ſimplicis ſubſidio figura et proprietates curuae quaeſitae facile innoteſcunt.

## Corollarium 1.

§. 5. Statim enim intelligitur, ſumto $X = 0$ fore etiam $Y = 0$, quod itidem euenit quando $X = \frac{9}{2}p$. Tum vero applicata erit maxima, vbi

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}}{2\sqrt{X}} - \frac{1}{3p}\sqrt{X} = 0,$$

hoc eſt vbi $X = \frac{3}{2}p$, exiſtente hac applicata $Y = \pm p$. Denique poſito $X = \infty$, erit $Y = \pm\infty$. Curua igitur formam habebit Lemniſcatae Carteſii ſimilem, in figura ſecunda expreſſam, vbi ſcilicet longitudo axis a vertice ad nodum $AB = \frac{9}{2}p$, tum vero $AC = \frac{3}{2}p = \frac{1}{3}AB$, $CD = CE = p$; curuae autem rami AEBG, ADBH, ſecus ac in Lemniscata Carteſii euenit, demum ad diſtantiam infinitam a vertice A habent aſſymptotam axi AB normalem.

Tab. IV. Fig. 2.

## Corollarium 2.

§. 6. Videamus etiam quaenam hic ſit longitudo arcus indefiniti $AZ = S$. Cum igitur in genere ſit $S = PM + MZ$ (§. 3.), ob $PM = y = \sqrt{\frac{2}{3}pX}$ et

$$MZ = \frac{y(pp + yy)}{2pp} = \left(\frac{1}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX},$$

habebimus

$$S = \left(\frac{3}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}.$$

Quod ſi hic ſtatuatur primo $X = \frac{3}{2}p$, fiet longitudo arcus $AD = AE = 2p$; tum vero ſi ſumatur $X = \frac{9}{2}p$, fiet longitudo arcus $ADB = AEB = 3p\sqrt{3}$.

## Corollarium 3.

§. 7. Cum inuenerimus

Applicatam $Y = \left(\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}$,

Arcum $S = \left(\frac{3}{2} + \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}pX}$,

adden-

addendo habebimus $Y + S = 3\sqrt{\frac{2}{3}p\,X}$; vnde diſcimus in Cauſtica Parabolae ſummam applicatae et arcus vbique eſſe in ratione ſubduplicata abſciſſae.

## Corollarium 4.

§. 8. Examinemus etiam quadraturam huius curuae, et cum ſit

$$\int Y\,\partial X = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}p}\int X^{\frac{1}{2}}\,\partial X - \sqrt{\tfrac{2}{27\,p}}\int X^{\frac{3}{2}}\,\partial X,$$

integrando colligitur ſpatium indefinitum

$$ADZX = \sqrt{\tfrac{2}{3}p}\,.\,X^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{2}{27\,p}}\,.\,X^{\frac{5}{2}}.$$

Hinc ſumto $X = \frac{3}{2}p$ prodit ſpatium

$$ACD = \tfrac{6}{5}pp \text{ et } DAE = \tfrac{12}{5}pp;$$

ſumto vero $X = \frac{9}{2}p$, habebitur ſpatium $ADB = \frac{9}{5}pp\sqrt{3}$, hinc totum ſpatium intra nodum et verticem $BDAEB = \frac{18}{5}pp\sqrt{3}$. Ioh. Bernoulli (*V. Opera Tom. III. pag.* 472.) inuenit hoc ſpatium $ADB = \frac{5}{2}pp\sqrt{3}$, quod autem falſum eſſe iam inde manifeſtum eſt, quod area rectanguli ex AB et CD facti tantum non aequale ſit areae ſpatii ADB, quemadmodum ea a Ioanne Bernoulli aſſignatur. Mendae origo latet, quoniam calculum non appoſuit Auctor.

## Corollarium 5.

§. 9. Etiam angulum curuedinis pro ſingulis curuae elementis noſſe iuuabit. Cum igitur, poſito hoc angulo $= \omega$, ſit tang. $\omega = \frac{\partial Y}{\partial X}$, erit

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{X}{p}\right)\sqrt{\frac{2}{3}p}}{2\sqrt{X}}.$$

Hinc iam manifeſtum eſt in puncto A, vbi $X = 0$, fore tang. $\omega = \infty$ et $\omega = 90°$, hoc eſt curua in vertice A axi normali-

 ter

ter inſiſtit. Porro in puncto D, vbi $X = \frac{3}{2} p$, erit tang. $\omega = 0$ et $\omega = 0$, ergo curua axi parallela, vti requiritur. Deinde in puncto B, vbi $X = \frac{9}{2} p$, erit tang. $\omega = -\surd \frac{1}{3}$, ergo $\omega =$ F B K $= 150°$, ſiue A B F $= 30°$, ita vt ambo curuae rami ſeſe in puncto B ſub angulo 60 graduum interſecent. Vbi adhuc obſeruandum, fore tangentem B F aequalem parti tertiae arcus A D B bis ſumtae, et perpendiculum C F ſemiſſem tangentis.

## Corollarium 6.

§. 10. Determinemus quoque radium curuaturae in ſingulis Causticae punctis, quod facillime praeſtabitur ope expreſſionis $R = -\frac{\partial S}{\partial \omega}$. Cum igitur inuenerimus

$$\text{tang.}\ \omega = \frac{(\frac{3}{2} - \frac{X}{p})\surd \frac{2}{3} p}{2\surd X},$$

differentiando habebimus:

$$\frac{\partial \omega}{\text{coſ.}\ \omega^2} = -\frac{\partial X . \surd \frac{2}{3} p \times (\frac{3}{2} + \frac{X}{p})}{4 X \surd X};$$

tum vero

$$\text{coſ.}\ \omega = \frac{2\surd X}{(\frac{3}{2} + \frac{X}{p})\surd \frac{2}{3} p},$$

conſequenter

$$\partial \omega = -\frac{\partial X}{(\frac{3}{2} + \frac{X}{p})\surd \frac{2}{3} p X}.$$

At vero eſt

$$\partial S = \surd(\partial X^2 + \partial Y^2) = \surd\left(\partial X^2 + \frac{\partial X^2 (\frac{3}{2} - \frac{X}{p})^2 \frac{2}{3} p}{4 X}\right),$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

∂ S

$$\partial S = \frac{\partial X(\frac{3}{2} + \frac{X}{p}) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}p}}{2\sqrt{X}}.$$

His igitur ſubſtitutis erit radius oſculi

$$R = \tfrac{1}{3}p(\tfrac{3}{2} + \tfrac{X}{p})^2.$$

Quod ſi igitur ſtatuatur $X = 0$, habebitur radius oſculi in vertice $A = \frac{3}{4}p$. Sin autem ponatur $X = \frac{3}{2}p$, innoteſcit radius oſculi in puncto $D = 3p$. Denique habebitur radius oſculi in nodo vel puncto interſectionis B, ponendo $X = \frac{9}{2}p$, quo facto fiet $R = 12p$.

## Corollarium 7.

§. 11. Quod ſi iam punctum Z noſtrae curuae ad axem EF referamus, ſtatuendo abſciſſam $DV = x$ et applicatam $VZ = y$, erit $X = \frac{3}{2}p + y$ et $Y = p - x$, vnde aequatio ad curuam erit:

$$x = p + \tfrac{y - 3p}{3p}\sqrt{(pp + \tfrac{2}{3}py)}.$$

Ducta iam ex puncto Z normali ZN, quae axi abſciſſarum productae occurrat in N, erit differentia inter rectam DN et arcum DZ vbique aequalis ſemiparametro Parabolae genitricis ter ſumto. Cum enim ſit differentiando

$$\partial x = \frac{y\,\partial y}{3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

erit Subnormalis

$$VN = \tfrac{y\,\partial y}{\partial x} = 3\sqrt{(pp + \tfrac{2}{3}py)},$$

ideoque

$$DN = x + 3\sqrt{(pp + \tfrac{2}{3}py)}.$$

Tum vero erit arcus

$$DZ = \int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \int\frac{\partial y(3p + y)}{3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}};$$

hoc eſt

$$DZ = x + \int \frac{p\,\partial y}{\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}}.$$

Cum igitur ſit

$$\int \frac{p\,\partial y}{\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}} = 3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)} - 3p,$$

integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $y = 0$, erit arcus noſter

$$DZ = x - 3p + 3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)},$$

hincque $DN - DZ = 3p$. Hinc cum ſit arcus $AD = 2p$, erit etiam $DN - ADZ = p$.

## Corollarium 8.

§. 12. Quin etiam, ſi in axe AB ſiniſtrorſum producto capiatur interuallum $AI = AC = \frac{3}{2}p$, atque in I erigatur perpendiculum IT, tangenti ZT occurrens in T, arcus indefinitus ADZ aequabitur vbique ſemiſummae perpendiculi et tangentis, quod ita oſtendo. Ducta ZQ axi parallela erit

$$ZV : Vt = ZQ : QT$$
$$ZV : Zt = ZQ : ZT,$$

vnde fit

$$QT = \frac{Vt \,.\, ZQ}{ZV} = \frac{\partial x(3p + y)}{\partial y},$$
$$ZT = \frac{Zt \,.\, ZQ}{ZV} = \frac{\partial s(3p + y)}{\partial y},$$

ideoque

$$QT + ZT = \frac{(3p + y)(\partial x + \partial s)}{\partial y}.$$

Tum vero habebimus ex §. 11.

$$QI = p - x = \frac{3p - y}{3p}\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)},$$

nec

nec non

$$\partial x + \partial s = \frac{\partial y\,(3p + 2y)}{3\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

conſequenter

$$QT + ZT = \frac{3\,(3p + y)(pp + \frac{2}{3}py)}{3p\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

vnde cum ſit

$$QI = \frac{(3p - y)(pp + \frac{2}{3}py)}{3p\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}},$$

harum linearum ſumma dat

$$IT + TZ = \frac{12p + 2y}{3p}\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)}.$$

Eſt vero ex §. 6. arcus

$$AZ = (\tfrac{3}{2} + \tfrac{X}{3p}) \sqrt{\tfrac{2}{3}pX},$$

ſiue per nouam applicatam $y$, ob $X = \frac{3}{2}p + y$, erit

$$AZ = \frac{6p + y}{3p}\sqrt{(pp + \frac{2}{3}py)} = \frac{IT + TZ}{2}.$$

## Scholion.

§. 13. Praeter illas igitur inſignes proprietates huius curuae mirabilis, ex parte iam dudum cognitas, quod ſcilicet pro punctis eius cardinalibus abſciſſae, applicatae, radii oſculi, arcus et ſpatia tam ſimplicem teneant rationem ad Parametrum Parabolae genitricis, eiusue quadratum, iſta curua adhuc ſequentibus gaudet proprietatibus ſingularibus:

1°.) Summa applicatae et arcus correſpondentis eſt vbique in ratione ſubduplicata abſciſſae (V. §. 7.).

2°. Differentia arcus et lineae abſciſſarum comprehenſae intra curuam et Normalem correſpondentem, eſt conſtanter eadem et triplo ſemiparametri Parabolae genitricis aequalis, ſi ſcilicet abſciſſae capiantur in recta axem et vtrumque curuae ramum normaliter traiiciente (§. 11.).

3°.)

3°.) Producta tangente vsque ad poſitione datum perpendiculum in axem per verticem nodi tranſeuntem, erit ſemiſumma Tangentis et perpendiculi arcui a vertice ſumto aequalis (§. 12.).

Videamus iam vtrum hae proprietates ad ſolam Cauſticam Parabolae reſtringantur, an vero etiam in aliis curuis locum habeant. Hunc in finem reſoluamus ſequentia tria Problemata.

## Problema 1.

§. 14. *Inuenire lineas curuas, in quibus ſumma applicatae et arcus ſit in ratione ſubduplicata abſciſſae.*

## Solutio.

Sit abſciſſa $= x$, applicata $= y$, poſitoque $\partial y = q \partial x$ fieri hic debet

$$y + \int \partial x \sqrt{(1 + qq)} = \sqrt{2ax}.$$

Hinc differentiando et per $\partial x$ diuidendo fit

$$q + \sqrt{(1 + qq)} = \frac{a}{\sqrt{2ax}},$$

vnde ſumtis quadratis vtrinque, prodit

$$2q\sqrt{(1 + qq)} = \frac{a - 2x}{2x} - 2qq,$$

ita vt denuo quadrando habeatur:

$$4qq = \frac{(a - 2x)^2}{4xx} - 2qq\frac{(a - 2x)}{x},$$

vnde colligitur

$$qq = \frac{(a - 2x)^2}{8ax}, \text{ hincque}$$

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{2ax}},$$

ita vt habeamus:

$$\partial y = \frac{\partial x(a - 2x)}{2\sqrt{2ax}},$$

et integrando

$$y = \frac{3a - 2x}{6a}\sqrt{2ax},$$

quae

quae aequatio ab ea quam ſupra §. 4. pro Cauſtica Parabolae inuenimus, tantum in eo differt, quod hic loco $p$ habeamus $\frac{1}{3}a$. Praeter hanc igitur curuam nulla alia conditioni Problematis ſatisfacit.

## Problema 2.

§. 15. *Inuenire curuam ATM, ad quam ſi in puncto quouis T ducatur normalis TN, axi AB occurrens in N, differentia arcus et rectae AN ſit conſtans.* Tab. IV. Fig. 3.

## Solutio.

Sit abſciſſa $AX = x$, applicata $XY = y$, poſitoque $\partial y = q\,\partial x$, erit arcus $AY = \int \partial x \sqrt{(1 + qq)}$ et recta $AN = x + qy$. Fieri ergo debet

$$x + qy - \int \partial x \sqrt{(1 + qq)} = C.$$

Hinc differentiando erit

$$\partial x + q\,\partial y + y\,\partial q - \partial x \sqrt{(1 + qq)} = 0,$$

ſiue ponendo $\frac{\partial y}{q}$ loco $\partial x$ prodibit

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{-q\,\partial q}{1 + qq - \sqrt{(1 + qq)}}.$$

Ponatur $\sqrt{(1 + qq)} = u$, erit $1 + qq = uu$ et $q\,\partial q = u\,\partial u$, quibus ſubſtitutis habebimus $\frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial u}{u - 1}$, hincque integrando $ly = la - l(u - 1)$ et ad numeros ſurgendo

$$y = \frac{a}{u - 1} = \frac{a}{\sqrt{(1 + qq)} - 1}.$$

Hinc porro fit $\sqrt{(1 + qq)} = \frac{a + y}{y}$, ideoque $qq = \frac{aa + 2ay}{yy}$, vnde porro concluditur

$$\partial x = \frac{\partial y}{q} = \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(aa + 2ay)}}.$$

Ad hanc formulam commodius integrandam ponatur $\sqrt{(aa + 2ay)} = z$, fietque

$$y = \frac{zz - aa}{2a} \text{ et } \partial y = \frac{z \partial z}{a},$$

quibus ſubſtitutis erit $\partial x = \frac{(zz - aa) \partial z}{2aa}$, vnde fit

$$x = \text{Conſt.} + \frac{z^3}{6aa} - \tfrac{1}{2} z,$$

et reſtituendo

$$x = C + \frac{(aa + 2ay)^{\frac{3}{2}}}{6aa} - \tfrac{1}{2} \sqrt{(aa + 2ay)},$$

quae aequatio facile reducitur ad hanc:

$$x = C + \frac{y - a}{3a} \sqrt{(aa + 2ay)}.$$

Determinata autem conſtante C ita, vt facto $y = 0$ fiat etiam $x = 0$, erit

$$x = \tfrac{1}{3} a + \frac{y - a}{3a} \sqrt{(aa + 2ay)},$$

quae eſt eadem aequatio quam ſupra §. 11. methodo directa pro Cauſtica Parabolae inuenimus, dum ſcilicet omnia ad axem E F retulimus. Praeter hanc igitur curuam nulla alia proprietate in Problemate enunciata gaudet.

## Problema 3.

Tab IV. Fig. 4. §. 16. *Inuenire curuam D Y M ita comparatam, vt ducta tangente Y T, et erecto ex initio abſciſſarum A perpendiculo A V, arcus D Y vbique aequalis ſit ſemiſummae tangentis et perpendiculi.*

## Solutio.

Poſitis coordinatis $AX = x$, $XY = y$, nec non $\partial y = q \partial x$, erit Tangens $TY = \frac{y \sqrt{(1 + qq)}}{q}$ et Subtangens $TX = \frac{y}{q}$, hinc $AT = \frac{y - qx}{q}$. Iam ex V in XY agatur normalis VQ, eritque $TX : TY = VQ : VY$, vnde fit

$$VY = \frac{TY \cdot VQ}{TX} = x \sqrt{(1 + qq)};$$

tum

tum vero erit $TX : XY = VQ : QY$, hinc $QY = \frac{XY . VQ}{TX}$ $= q x$, conſequenter

$$AV = XY - QY = y - q x.$$

Conditio igitur Problematis iam poſtulat vt huic conditioni ſatisfiat:

$$2 \int \partial x \sqrt{(1 + q q)} = y - q x + x \sqrt{(1 + q q)}.$$

Differentietur haec aequatio, et prodibit:

$$\partial x \sqrt{(1 + q q)} = \frac{x \partial q [q - \sqrt{(1 + q q)}]}{\sqrt{(1 + q q)}},$$

hinc ſeparando variabilia erit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{q \partial q}{1 + q q} - \frac{\partial q}{\sqrt{(1 + q q)}},$$

vnde integrando deducitur:

$$l x = l a + l \sqrt{(1 + q q)} - l [q + \sqrt{(1 + q q)}],$$

ita vt ad numeros ſurgendo habeamus:

$$x = \frac{a \sqrt{(1 + q q)}}{q + \sqrt{(1 + q q)}},$$

vnde porro ſequitur:

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - x}{\sqrt{(2 a x - a a)}}, \text{ ſiue}$$

$$\partial y = \frac{(a - x) \partial x}{\sqrt{(2 a x - a a)}},$$

Ponatur $\sqrt{(2 a x - a a)} = v$, erit $a - x = \frac{a a - v v}{2 a}$ et $\partial x = \frac{v \partial v}{a}$, hincque

$$\partial y = \tfrac{1}{2} \partial v - \frac{v v \partial v}{2 a a},$$

et integrando

$$y = \text{Conſt.} + \tfrac{1}{2} v - \frac{v^3}{6 a a},$$

ſiue reſtituto $x$

$$y = b + \frac{2 a - x}{3 a} \sqrt{(2 a x - a a)},$$

 vnde

vnde ſi conſtans $b$ ita determinetur, vt $y$ euaneſcat ſumto $x = \frac{1}{2}a$, erit $b = 0$ et

$$y = \frac{2a - x}{3a} \surd (2ax - aa),$$

ſiue poſito $x = X + \frac{1}{2}a$, fiet

$$y = \frac{3a - 2X}{6a} \surd 2aX,$$

quam eandem aequationem ſupra iam §. 14. inuenimus pro Cauſtica Parabolae, praeter quam igitur et haec tertia proprietas nulli lineae curuae conuenit.

## Scholion.

§. 17. Hoc poſtremum Problema ſequenti modo multo generalius enunciari et reſolui poteſt, ponendo ſcilicet rationem inter arcum D Y et ſummam rectarum A V + V Y qualemcunque. Haec reſolutio cum nonnulla habeat attentione digna, mereri videtur vt heic coronidis loco exponatur.

## Problema generalius.

§. 18. *Inuenire curuam D Y M, vt ducta tangente Y T, ad eamque vsque ex puncto dato A normali in axem, A V, ſit ſumma rectarum A V et V Y in data ratione ad arcum D Y.*

## Solutio.

Sit ratio data vt $n$ ad 1, ita vt fieri debeat A V + V Y $= n$ D Y, et adhibitis iisdem denominationibus quas ſupra introduximus, aequatio reſoluenda erit

$$y - qx + x\surd(1 + qq) = n\int \partial x \surd(1 + qq),$$

ex qua per operationes ſuperioribus ſimiles eruitur:

$$(n - 1)\frac{\partial x}{x} = \frac{q\,\partial q}{1 + qq} - \frac{\partial q}{\surd(1 + qq)},$$

vnde

vnde porro integrando prodit

$$(n-1)\,l\,x = l\,A + l\,\sqrt{(1+qq)} - l\,[q+\sqrt{(1+qq)}],$$

et ſurgendo ad numeros

$$x^{n-1} = \frac{A\sqrt{(1+qq)}}{q+\sqrt{(1+qq)}},$$

hincque porro concluditur fore:

$$q = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{A - x^{n-1}}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

quamobrem habebitur applicata

$$y = \int \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

et arcus curuae quaeſitae

$$s = \int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}}.$$

Ex his igitur manifeſtum eſt curuam Problematis conditioni ſatisfacientem ſemper fore algebraicam et rectificabilem, quoties fuerit $n = \frac{i+1}{i}$, denotante $i$ numerum integrum quemcunque. Poſito enim $n = \frac{i+1}{i}$ et $\sqrt{(2Ax^{\frac{1}{i}} - AA)} = v$, fiet

$$y = \frac{i}{2AA}\int (AA - vv)\left(\frac{AA+vv}{2A}\right)^{i-1}\partial v;$$

$$s = \frac{i}{A}\int \left(\frac{AA+vv}{2A}\right)^{i}\partial v;$$

quae formulae, quoties $i$ fuerit numerus integer, per terminorum numerum finitum euolui, tumque ſinguli termini integrari poterunt.

## Corollarium 1.

§. 19. Etiamſi integratio in genere non ſuccedat, tamen facile oſtenditur, formulas iſtas generales Problemati fore ſatisfacturas. Cum enim ſit:

$$A\,V = y - q\,x = \int \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - AA)}} - \frac{x\,(A - x^{n-1})}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - AA)}},$$

$$V\,Y = x\sqrt{(1 + q\,q)} = \frac{x^n}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - AA)}},$$

habebimus:

$$A\,V + V\,Y = \int \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - A\,A)}} + \frac{x}{A}\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - AA)},$$

At vero fieri debet

$$A\,V + V\,Y = n\int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - A\,A)}},$$

ideoque

$$\int \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}} + \frac{x}{A}\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)} = n\int \frac{x^{n-1}\,\partial x}{\sqrt{(2Ax^{n-1} - AA)}},$$

quam aequalitatem reuera locum habere ipſa differentiatio docet. Differentia autem conſtans, quae forte per integrationem actualem ingrederetur, hic non in cenſum venit, quoniam ſemper in noſtra poteſtate eſt ita integrare, vt haec conſtans euaneſcat.

## Corollarium 2.

§. 20. Maxime autem ob ſummam ſimplicitatem notatu digna eſt expreſſio radii oſculi omnium curuarum in quibus ſumma tangentis et perpendiculi eſt in ratione arcus. Cum enim ſit

$$\partial y = \frac{(A - x^{n-1})\,\partial x}{\sqrt{(2\,A\,x^{n-1} - AA)}},$$

facile inuenitur:

$\partial\,\partial y$

$$\partial \partial y = -\frac{(n-1)\, A\, x^{2n-3}\, \partial x^2}{(2\, A\, x^{n-1} - AA)^{\frac{3}{2}}},$$

conſequenter erit radius oſculi

$$R = -\frac{\partial s^3}{\partial x\, \partial \partial y} = \frac{x^n}{(n-1)\, A},$$

ſiue ſcribendo loco conſtantis A poteſtatem $b^{n-1}$, erit

$$R = \frac{x^n}{(n-1)\, b^{n-1}}.$$

## Corollarium 3.

§. 21. Applicetur adhuc ſolutio generalis ad alium caſum, vbi $n$ eſt numerus formae $\frac{i+1}{i}$, ſitque $n = \frac{3}{2}$, ita vt fieri debeat A V + V Y $= \frac{3}{2}$ D Y. Hoc igitur caſu eſt

$$y = \int \frac{(A - \surd x)\, \partial x}{\surd(2\, A \surd x - AA)},$$

$$s = \int \frac{\partial x \surd x}{\surd(2\, A \surd x - AA)}.$$

Statuatur iam $\surd(2\, A \surd x - AA) = z$, ita vt ſit $\surd x = \frac{AA + zz}{2\, A}$; $A - \surd x = \frac{AA - zz}{2\, A}$, $x = \frac{(AA + zz)^2}{4\, AA}$, et $\partial x = \frac{(AA + zz)\, z\, \partial z}{AA}$, quibus ſubſtitutis erit

$$y = \int \frac{(A^4 - z^4)\, \partial z}{2\, A^3} = \frac{Az}{2} - \frac{z^5}{10\, A^3},$$

$$s = \int \frac{(AA + zz)^2\, \partial z}{2\, A^3} = \frac{Az}{2} + \frac{z^3}{3A} + \frac{z^5}{10 A^3}.$$

Tum vero eſt

$$q = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A - \surd x}{\surd(2\, A \surd x - AA)} = \frac{AA - zz}{2\, A\, z},$$

con-

conſequenter $\surd(1+qq)-q=\frac{z}{A}$, vnde ob $AV+VY=y+x[\surd(1+qq)-q]$, erit

$$AV+VY=\frac{3Az}{4}+\frac{z^3}{2A}+\frac{3z^5}{20A^3},$$

vnde quia inuenimus

$$DY=s=\frac{Az}{2}+\frac{z^3}{3A}+\frac{z^5}{10A^3},$$

manifeſtum eſt fore

$$AV+VY=\tfrac{3}{2}DY,$$

vti requiritur. Huius denique curuae ſpatium indefinitum erit

$$\int y\,\partial x=z^3\left(\frac{A}{6}+\frac{z^2}{10A}-\frac{z^4}{70A^3}-\frac{z^6}{90A^5}\right),$$

et radius oſculi

$$R=\frac{2x\surd x}{A}.$$

DE-

# DEMONSTRATIO THEOREMATVM QVORVNDAM ANALYTICORVM.

Auctore
*NICOLAO FVSS.*

*Conuent. exhib. die 25 Oct. 1790.*

## ARTICVLVS I.

### §. 1.

Cum nuper Tomum ſecundum Diſſertationum Mathematicarum et Phyſicarum, a Societate Italica editarum, euoluerem, attentior ſubſtiti in ſequentibus ſummationibus, quas a ſummo quondam noſtro Eulero iam pridem demonſtratas noueram, ſcilicet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{n} = l\,\frac{1}{0},$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots \frac{1}{2n} = l\,\frac{2}{1},$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \ldots \frac{1}{3n} = l\,\frac{3}{2},$$

etc. etc.

denotante $n$ numerum infinite-magnum (*a*). Horum enim Theorematum non parum curioſorum ſecundum pro ſingulis celeberrimus Geometra Ticinenſis, Gregorius Fontana, loco citato, peringenioſe demonſtrat, vt qui ſingulos ſeriei terminos in progreſſionem geometricam transmutat, et collectis in vnam ſum-

(*a*) Memorie di Matematica e Fiſica della Società Italiana. Tomo II. Parte I. pag. 141.

ſummam terminis ſibi inuicem verticaliter ſubſcriptis, ob $n$ numerum infinitum, omnes eius poteſtates praeter ſupremam, in numeratoribus cuiusque membri delet.

§. 2. Quo Lectores, qui librum citatum non prae manibus habent, completam ſibi iuſtamque methodi ab acutiſſimo Fontana adhibitae ideam formare queant, ſimulque perſpiciant, quomodo valorem indagare liceat illius ſeriei, ad quam tandem hae operationes ducunt, tertiam heic ſummationum modo expoſitarum, ad mentem laudati Auctoris, demonſtrabimus, poſtmodum vero aliam methodum illas ſummationes demonſtrandi, ex ſingulari principio deriuatam, exhibebimus.

§. 3. Sit igitur ſummanda haec ſeries harmonica ex infinitis terminis infinite-paruis compoſita:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \cdots\cdots \frac{1}{3n},$$

et ſingulos terminos ſeorſim euoluendo prodit

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^3} - \frac{1}{16n^4} + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{2}{4n^2} + \frac{2^2}{8n^3} - \frac{2^3}{16n^4} + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n^2} + \frac{3^2}{8n^3} - \frac{3^3}{16n^4} + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{2n+4} = \frac{1}{2n} - \frac{4}{4n^2} + \frac{4^2}{8n^3} - \frac{4^3}{16n^4} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}$$

vnde porro, terminis ſibi inuicem ſubſcriptis in vnam ſummam collectis, naſcuntur ſequentes ſeries:

$$+ \frac{1}{2n}(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}),$$
$$- \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc.}),$$
$$+ \frac{1}{8n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \text{etc.}),$$
$$- \frac{1}{16n^4}(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \text{etc.}),$$

At vero notum eſt caſu $n = \infty$ fore:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.} = n,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{etc.} = \frac{n^2}{2},$$
$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \text{etc.} = \frac{n^3}{3},$$
$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \text{etc.} = \frac{n^4}{4},$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſeriei harmonicae propoſitae:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots \frac{1}{3n},$$

ſumma hac noua ſerie exprimitur:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \text{etc.}$$

cuius autem valor haud minus incognitus eſt quam valor ſeriei propoſitae, ſecus ac in demonſtratione ſecundi Theorematis, ab ipſo Auctore inſtituta, euenit, vbi eaedem operationes ad ſeriem notiſſimam perduxerant. Ad ſummam igitur huius poſtremae ſeriei eruendam obſeruandum eſt, ex ſerie notiſſima:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \text{etc.} = \frac{1}{x+1},$$

multiplicando per $\partial x$ et integrando oriri ſequentem:

$$l\,x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{etc.} = l\,(x+1),$$

vnde concluditur fore

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{etc.} = l\,\frac{x+1}{x},$$

hincque ſumto $x = 2$ habebimus:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \text{etc.} = l\,\frac{3}{2},$$

ita vt ſeriei propoſitae ſumma ſit

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots \frac{1}{3n} = l\,\frac{3}{2}.$$

§. 4. Ex hoc ſpecimine, in compendium, quantum fieri potuit, redacto, vis huius ingenioſae demonſtrationis, alias nonnihil prolixae, luculenter perſpicitur. Quantacunque autem ſit elegantia huius methodi, non video tamen quid viro, in cuius gratiam Cel. Fontana hunc laborem ſuſcepit (*b*), diſplicuerit in demonſtratione olim ab Eulero data, niſi forte nimis generalis ei viſa fuerit et non ſatis prolixe explicata (*c*). Quin etiam nihil pretio huius nouae demonſtrationis detrahere mihi videor, ſi eam Eulerianae, quoad methodum, nec rigore neque euidentia antecellere exiſtimem. Tantum interea abeſt vt credam ſuperfluam ideo eſſe nouam hanc demonſtrationem illorum Theorematum Eulerianorum, vt potius demonſtrationibus modo memoratis ſequentem, oblata hac occaſione, adiicere non dubitem, quae, vt ſpero, ſimplicitate aeque ac elegantia quodammodo Geometris ſe commendabit.

# Theorema I.

§. 5. *Denotante* n *numerum infinite-magnum et* l *logarithmum hyperbolicum, erit:*

$$(A)\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \frac{1}{n} = l\,\frac{1}{0},$$

$$(B)\quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots\ldots \frac{1}{2n} = l\,\frac{2}{1},$$

$$(C)\quad \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \ldots\ldots \frac{1}{3n} = l\,\frac{3}{2},$$

$$(D)\quad \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \ldots\ldots \frac{1}{4n} = l\,\frac{4}{3},$$

etc. etc.

De-

(*b*) "Finiro" inquit Vir clariſſimus, pag. 138. lib. cit. "con riſpondere all' „ultima ſua dimanda, di communicarle una nuova dimoſtrazione del „bel Teorema concernente l'uguaglianza fra il Logaritmo iperbolico „del numero 2 e la ſerie armonica a termini infiniteſimi *non paren„dole pienamente ſoddisfacenti le dimoſtrazioni da lei vedute*".

(*c*) Comment. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VII. pag. 157.

# Demonſtratio.

I. Cum ſit

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

multiplicando per $\partial x$ et integrando erit:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n} = l\,\frac{1}{1-x},$$

vnde poſito $x = 1$ naſcitur prima ſeries:

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots \tfrac{1}{n} = l\,\tfrac{1}{0},$$

II. Porro cum ſit

$$A + B = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^{2n}}{2n} \text{ et}$$

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n},$$

ſumto ſcilicet $x = 1$, ſi in hac poſtrema ſerie loco $x$ ſcribatur $x^2$, quod, quia deinceps vbique loco $x$ vnitas ſcribitur, ſine vllo dubio licet, prodibit

$$A = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \ldots \frac{x^{2n}}{n},$$

qua ſerie ab illa pro $A + B$ aſſumta ſublata remanet

$$B = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

ita vt poſito $x = 1$ habeamus:

$$B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = l\,2,$$

conſequenter:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots \frac{1}{2n} = l\,\tfrac{2}{1},$$

III. Eodem modo cum poſito $x = 1$ ſit

$$A + B + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^{3n}}{3n},$$

ſi in ſerie

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n},$$

loco $x$ ſcribatur $x^3$ et ſeries inde reſultans:

$$A = x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{4} + \ldots \frac{x^{3n}}{n},$$

aufferatur a priore, remanebit:

$$B + C = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \text{etc.}$$

ita vt poſito $x = 1$ habeamus:

$$B + C = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \text{etc.} = l\,3,$$

vnde colligitur $C = l\,3 - B$. Eſt vero $B = l\,2$, vt modo vidimus, ergo $C = l\,\frac{3}{2}$, hoc eſt

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \text{etc.} = l\,\frac{3}{2},$$

IV. Simili porro modo, quoniam

$$A + B + C + D = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^{4n}}{4n},$$

ſumto ſcilicet $x = 1$: ſi in ſerie illa

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \frac{x^n}{n},$$

loco $x$ ſcribatur $x^4$, ſeriesque hinc orta

$$A = x^4 + \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} + \frac{x^{16}}{4} + \ldots \frac{x^{4n}}{n},$$

ſubtrahatur ab $A + B + C + D$, reſtabit

$$B + C + D = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

ſiue reſtituta loco $x$ vnitate:

B +

$$B + C + D = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \text{etc.} = l\,4,$$

conſequenter $D = l\,4 - (B + C)$. Supra autem vidimus eſſe $B + C = l\,3$, ergo $D = l\,\tfrac{4}{3}$, hoc eſt

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} + \text{etc.} = l\,\tfrac{4}{3}.$$

Q. E. D.

## Scholion.

§. 6. Quod ſi cui ſuſpecta videatur haec demonſtrandi methodus, ideo quod, ne tanto terminorum numero opus ſit, loco vnitatis in ſingulis numeratoribus poteſtates quantitatis arbitrariae $x$ in calculum introduximus, dum ſcilicet loco progreſſionis A ſucceſſiue ſcripſimus:

$$A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{x^n}{n},$$

$$A = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{x^{2n}}{n},$$

$$A = x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{4} + \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{x^{3n}}{n},$$

etc.

quo hic procedendi modus magis explicetur, ſimulque omne dubium tollatur, theorematis demonſtrationem ſequenti modo, ſine ſubſidio litterae $x$ inſtituemus.

## Alia demonſtratio Theorematis I.

§. 7.

$$A + B = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots \tfrac{1}{2n}$$

$$-A = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \ldots \tfrac{1}{n}$$

$$B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \text{etc.} = l\,2,$$

ita vt ſtatim habeamus $B = l\,\tfrac{2}{1}$,

$$A + B + C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots \tfrac{1}{3n}$$

$$-A = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \ldots \tfrac{1}{n}$$

$$B + C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.} = l\,3,$$

hinc-

hincque ſit $C = l\,3 - B = l\,\frac{3}{2}$,

$$\begin{array}{l} A+B+C+D = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots\frac{1}{4n} \\ -A \quad = \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}-\ldots\frac{1}{n}, \\ \hline B+C+D = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{3}{12}+\text{etc.} = l\,4 \end{array}$$

conſequenter $D = l\,4 - (B + C) = l\,\frac{4}{3}$,

Q. E. D.

## Corollarium.

§. 8. Cum igitur ſit

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1}{0} + l\,\frac{2}{1} + l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{4}{3} + \text{etc.}$$

ſiue etiam

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ (n+1)}{0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n},$$

ſequitur fore

$$A + B + C + D + \text{etc.} = l\,\frac{1}{0} + l\,(n + 1).$$

Eſt vero $A = l\,\frac{1}{0} = l\,n$, ergo $B + C + D + \text{etc.} = l\,(n + 1)$ et

$$A - (B + C + D + \text{etc.}) = l\,\frac{n}{n+1} = 0,$$

ideoque

$$A = B + C + D + E + \text{etc.}$$

Summa igitur omnium terminorum ſeriei harmonicae naturalis ab 1 vsque ad $\frac{1}{n}$ aequalis eſt ſummae omnium terminorum ſequentium vsque ad $\frac{1}{nn}$: differentia enim inter ambo haec infinita $l\,n$ et $l\,n+1$ videtur nulla. Interim tamen non praetereunda eſt obſeruatio, in integratione formulae $\frac{\partial x}{1-x}$ neglectam fuiſſe conſtantem, qua adiecta erit $A = l\,n + C$, hincque

$$A - (B + C + D + \text{etc.}) = C,$$

cuius litterae C valor eſt $C = 0,5772156649$. Ita differentia inter ſummam ſeriei harmonicae naturalis ab 1 vsque ad $\frac{1}{n}$,

$\frac{1}{n}$, et ſummam terminorum ſequentium vsque ad $\frac{1}{nn}$ reuera eſt $= 0,5772156649$, idem ſcilicet ille numerus memorabilis, de quo Eulerus ampliſſime diſſeruit in noſtris Actis (*d*).

## ARTICVLVS II.

§. 9. Quae praeterea Cel. Fontana adhuc affert in eadem diſſertatione (*e*), circa aequalitatem, vel potius inaequalitatem quantitatum:

$$e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\text{ etc.}} \text{ et } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{ etc.},$$

vbi ſeries in exponente eſt reciproca numerorum primorum, altera vero eſt progreſſio harmonica, numeros naturales in denominatoribus habens, haec, inquam, quoque directa videntur contra Eulerum (*f*), licet nominatim nulla de eo mentio fiat. Non ſolum enim obiectionum auctor, ipſis Euleri characteribus vſus, ſed etiam eius ratiocinia pedetentim proſecutus eſt. Adde quod non memini hanc aequalitatem vnquam ab alio Geometra prolatam et demonſtratam vidiſſe. Eulerus autem in Theoremate ſuo, loco citato, id tantum aſſerit: eſſe ſummam ſeriei reciprocae numerorum primorum infinities minorem ſerie harmonica naturali, eiusque quaſi logarithmum exhibere, quam propoſitionem etiam ſolidiſſime probauit, quamuis in demonſtratione ſua, ſine vlla neceſſitate, ad exponentialia confugit illamque aequationem protulit, quam reprobat Cl. Fontana, argumentis ſatis ſpecioſis eam impugnans. Etſi igitur fateri cogimur, virum immortalem non pro more ſuo euidentiae principiorum conſuluiſſe, dum in exponente quantitatem finitam prae infinita, absque rationum explicatione, neglexit: tamen

(*d*) Acta Acad. Imp. Sc. Petr. pro anno 1781. P. II. pag. 45.
(*e*) Memorie etc. Tom. II. P. II. pag. 134. ſeqq.
(*f*) Commentarii Acad. Scient. Imp. Petrop. Tom. IX. pag. 188.

tamen nobis liceat obſeruare, hac menda, ſi qua commiſſa eſt, ipſum Theorema nequaquam vitiari. Ad hoc oſtendendum Theorema memoratum Eulerianum ipſis Auctoris verbis hic enunciabimus eiusque demonſtrationem alio modo adornabimus; tum vero, quid de obiectionibus R. P. Fontanae ſentiendum ſit, videbimus. Quo autem haec demonſtratio facilius inſtitui queat, aliquot Lemmata ei inſeruientia praemittere eo minus alienum erit, quod eorum ope varia momenta demonſtrationis Eulerianae, quae vlteriore explicatione indigere videntur, magis eluceſcent.

## Lemma I.

§. 10. *Series reciproca numerorum naturalium, ſiue ſeries harmonica ſimplex:*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$

*aequalis eſt huic producto ex infinitis factoribus conſtanti:*

$$\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 15.\ 17.\ \text{etc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 14.\ 16.\ \text{etc.}}$$

*cuius numeratores ſunt numeri primi, denominatores vero itidem numeri primi vnitate minuti.*

## Demonſtratio.

Statuatur

$$s = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}$$

eritque

$$\tfrac{1}{2} s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ablata remanet:

$$\tfrac{1}{2} s = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

vbi igitur nulli denominatores pares occurrunt. Ab hac ſerie denuo auferatur haec:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} s = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{27} + \text{etc.}$$

ae

ac remanebit iſta:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,s = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

in qua nulli amplius denominatores per 2 et per 3 diuiſibiles occurrunt. Extrudantur ſimili modo multipla quinarii, quod fit, ſi a ſerie modo inuenta:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot s = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

ſubtrahatur haec:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\,s = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} + \frac{1}{65} + \text{etc.}$$

remanebit enim:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\,s = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

Quodſi hoc modo vlterius procedamus, expellendo ſucceſſiue denominatores 7, 11, 13, 17, etc. erit

$$s\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\text{etc.} = 1,$$

conſequenter:

$$s = \frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ 19.\ 23.}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ 18.\ 22.}\ \text{etc.}$$

Q. E. D.

## Corollarium.

§. 11. Cum ſupra inuenerimus:

$$\text{I.}\quad \frac{1}{2}\,s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \text{etc.}$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{2}\,s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

hinc ſequitur has ambas ſeries, quarum vtraque infinitam habet ſummam, inter ſe eſſe aequales, etiamſi earum differentiam aſſignare valeamus, quippe quae eſt:

$$\text{II.} - \text{I} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \text{etc.} = l\,2,$$

ita vt inter duas quantitates infinite-magnas aequalitas ſubſiſtere

tere queat, etiamſi quantitate finita a ſe inuicem diſcrepent, quae obſeruatio, iam ſupra §. 8. tradita, in ſequentibus nobis vſu veniet.

## Scholion.

§. 12. Eodem, quo hic vſi ſumus, modo etiam ſequentes ſeries reciprocas generaliores:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

$$N = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

in producta infinita transformare licet. Reperietur enim fore per huiusmodi producta:

$$M = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \text{etc.}$$

$$N = \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \text{etc.}$$

vnde, diuidendo prius per alterum, naſcitur:

$$\frac{M}{N} = \frac{2^n}{2^n - 1}, \text{ ſiue}$$

$$M : N = 2^n : 2^n - 1,$$

quae proprietas, etiamſi hic nullius ſit vſus, digna tamen mihi viſa eſt vt hac occaſione produceretur. En igitur Theorema ſequens:

*Series reciproca poteſtatum* n^marum^ *numerorum naturalium eſt ad ſeriem reciprocam poteſtatum* n^marum^ *numerorum imparium vt poteſtas* n^ma^ *binarii eſt ad eandem vnitate minutam.*

Lem-

# Lemma II.

§. 13. *Si ponatur*

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

*erit*

$$\frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\frac{2}{1} + l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{5}{4} + l\,\frac{7}{6} + \text{etc.}$$

# Demonſtratio.

Cum ſit

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{2} = \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{2.7^2} + \frac{1}{2.11^2} + \text{etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{3} = \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{3.11^3} + \text{etc.}$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{4} = \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{4.5^4} + \frac{1}{4.7^4} + \frac{1}{4.11^4} + \text{etc.}$$

etc. etc.

ſi termini ſibi inuicem verticaliter ſubſcripti in vnam ſummam colligantur, ob

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \text{etc.} = \frac{1}{x-1} \text{ et}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{etc.} = l\,\frac{x}{x-1},$$

habebimus;

 $\frac{3}{2}$ +

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \text{etc.} = l\,\frac{2}{1},$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{4.3^4} + \text{etc.} = l\,\frac{3}{2},$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{4.5^4} + \text{etc.} = l\,\frac{5}{4},$$
$$\frac{1}{7} + \frac{1}{2.7^2} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{4.7^4} + \text{etc.} = l\,\frac{7}{6},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

conſequenter

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\frac{2}{1} + l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{5}{4} + l\,\frac{7}{6} + \text{etc.}$$

Q. E. D.

# Lemma III.

§. 14. *Iisdem poſitis erit*

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.} = \frac{3}{2} - l\,2,$$

*ideoque quantitas finita, vnitate adeo minor.*

## Demonſtratio

Collectis terminis ſibi inuicem ſubſcriptis in vnam ſummam erit:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \begin{cases} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{49}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Notum autem eſt eſſe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.} = 2,$$
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = \frac{3}{2},$$
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{5}{4},$$
$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{7}{6},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

vnde

vnde colligitur fore

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2.3} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{6.7} + \tfrac{1}{8.9} + \text{etc.}$$

Iam ſtatuatur $\frac{x}{1-x^2} = s$, eritque per ſeriem:

$$s = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + \text{etc.}$$

hinc per $\partial x$ multiplicando et integrando prodit:

$$\int s \partial x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

quae ſeries denuo in $\partial x$ ducta et integrata praebet:

$$\int \partial x \int s \partial x = \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^7}{6.7} + \frac{x^9}{8.9} + \text{etc.}$$

At vero, cum poſuerimus $s = \frac{x}{1-x^2}$, erit

$$\int s \partial x = -\log. \sqrt{(1-xx)},$$

$$\int \partial x \int s \partial x = -\int \partial x\, l \sqrt{(1-xx)},$$

Ponatur $1 - xx = zz$, ita vt ſit $\partial x = -\frac{z \partial z}{\sqrt{(1-zz)}}$, eritque

$$\int \partial x \int s \partial x = \int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1-zz)}},$$

ita vt per Lemma notiſſimum:

$$\int P \partial Q = PQ - \int Q \partial P,$$

habeamus

$$\int \partial x \int s \partial x = -\sqrt{(1-zz)}\, l z + \int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z}.$$

Cum igitur, reſtituendo litteram $x$, ſit

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z} = -\int \frac{xx \partial x}{1-xx} = \int \partial x - \int \frac{\partial x}{1-xx},$$

hoc eſt

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(1-zz)}}{z} = x + \tfrac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x} = x + \tfrac{1}{2} l \frac{1-xx}{(1+x)^2},$$

erit denique

$$\int \partial x \int s \partial x = -x\, l \sqrt{(1-xx)} + x + l \sqrt{(1-xx)} - l(1+x),$$

vnde poſito $x = 1$ erit

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = 1 - l\, 2.$$

At vero per ſeriem eſt

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \text{etc.}$$

conſequenter:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} + 1 - l\, 2 = \tfrac{3}{2} - l\, 2.$$

Q. E. D.

## Corollarium.

§. 15. Cum inuenerimus

$$\int \partial x \int s \partial x \begin{bmatrix} \text{ab} & x = 0 \\ \text{ad} & x = 1 \end{bmatrix} = 1 - l\, 2,$$

poſito vero $1 - xx = zz$ habeamus:

$$\int \partial x \int s \partial x = \int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}},$$

ſequitur fore:

$$\int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}} \begin{bmatrix} \text{a} & z = 1 \\ \text{ad} & z = 0 \end{bmatrix} = 1 - l\, 2,$$

hincque mutatis terminis integrationis:

$$\int \frac{z \partial z\, l z}{\sqrt{(1 - zz)}} \begin{bmatrix} \text{a} & z = 0 \\ \text{ad} & z = 1 \end{bmatrix} = l\, 2 - 1.$$

## Lemma IV.

§. 16. *Denotante* x *numerum infinitum, eius logarithmus etiam erit infinitus, attamen infinities minor quam* **x.**

## Demonſtratio.

Ponatur $v = \frac{\sqrt{x}}{l x}$, et poſito $p = \frac{1}{l x}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, erit $v = \frac{p}{q}$. Quoniam autem, ſumto $x = \infty$, quantitas $v$ indefinitum

tum ſortitur valorem, cum ſit $v = \frac{0}{0}$, erit ſecundum regulam notam $v = \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{2\sqrt{x}}{(l\,x)^2}$. Cum autem poſuerimus $v = \frac{\sqrt{x}}{l\,x}$, erit $vv = \frac{x}{(l\,x)^2}$, quod diuiſum per $v = \frac{2\sqrt{x}}{(l\,x)^2}$ praebet $v = \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$, ſumto $x = \infty$, ita vt hoc caſu ſit $\frac{\sqrt{x}}{l\,x} = \infty$, hoc eſt logarithmus infiniti infinities minor quam radix infiniti, et a fortiori log. $x$ infinities minor quam $x$.

## Theorema II.

§. 17. *Summa ſeriei reciprocae numerorum primorum:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.}$$

*eſt infinite-magna, infinities tamen minor quam ſumma ſeriei harmonicae:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$

*atque illius ſumma eſt quaſi logarithmus ſummae iſtius.*

## Demonſtratio.

Supra in Lemmate primo (§. 10.) inuenimus eſſe ſeriem reciprocam numerorum naturalium:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} = \frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12}\ \text{etc.}$$

Cum igitur ex Lemmate ſecundo (§. 13.) ſit

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = l\,\frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12}\ \text{etc.}$$

hinc ſequitur fore

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{etc.} = \log.\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}).$$

Notum autem eſt ſummam ſeriei harmonicae eſſe infinitam (§. 5. N°. 1.); erit igitur

$$\log.\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}) = \infty.$$

Infinitum igitur etiam erit aggregatum:

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \frac{\mathfrak{E}}{5} + \text{etc.}$$

Ex Lemmate tertio autem (§. 14.) conſtat eſſe:

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.} = \tfrac{3}{2} - l\,2 = 0,806853,$$

ideoque quantitas finita ſatis parua, vnde neceſſario quantitas $\mathfrak{A}$ infinita eſſe debet, cuius reſpectu ſequentes termini

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{D} + \text{etc.}$$

(multo minores quam $\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$) tuto negligi poſſunt, ita vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.} = l\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}).$$

Eſt igitur ſumma ſeriei reciprocae numerorum primorum *quaſi* logarithmus ſummae ſeriei harmonicae, ideoque infinities minor (§. 16.).

Q. E. D.

## Corollarium 1.

§. 18. Cum ſit vi §. 5$^{ti}$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.} = l\,\infty,$$

ſequitur fore

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.} = l\,l\,\infty,$$

vnde patet ſummam ſeriei reciprocae numerorum primorum ad genus quantitatum infinitarum multo inferius pertinere quam quod per ſimplicem logarithmum infiniti deſignatur (§. 16.).

## Corollarium 2.

§. 19. Quod ſi autem nunc ad numeros eſſet ſurgendum, ex aequalitate illa §$^{i}$ 17:

$$\mathfrak{A} = \log.(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}),$$

ſeque-

ſequeretur ipſa aequatio a Cel. Fontana oppugnata:

$$e^{\mathfrak{A}} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{ etc.} = A$$

Quanquam enim reuera eſt $e^{\mathfrak{A}+n} = A$, exiſtente

$$n = \frac{\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{C}}{3} + \frac{\mathfrak{D}}{4} + \text{ etc.}$$

tamen factor finitus $e^n$, contra ſententiam Cl. Fontanae, hic non in cenſum venit, quoniam vtraque aequatio $e^{\mathfrak{A}} = A$ et $e^{\mathfrak{A}+n} = A$, idem ſignificat, ſcilicet eiusdem gradus eſſe ambo Infinita $e^{\mathfrak{A}}$ et A; id ipſum, quod Eulerus oſtendere voluit. Longe aliter res ſe habet, quando ratio geometrica quaeritur inter illa Infinita $e^{\mathfrak{A}}$ et A; tum enim, vt recte monet ſagaciſſimus Fontana, in exponente quantitatem illam finitam $n$, quantumuis exiguam, non amplius negligere licet. Idem tenendum eſt de aequalitate ſupra §. 11. exhibita:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{ etc.} = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{ etc.}$$

vbi ſignum $=$ tantum indicat ſummas harum ſerierum ad eundem ordinem Infiniti pertinere. Quando autem rationem arithmeticam, ſiue differentiam quaerimus, tum illas ſeries non amplius aequales ponimus, quandoquidem nouimus, differentiam inter duo Infinita eiusdem gradus finitam atque adeo infinitam gradus inferioris eſſe poſſe.

## Scholion.

§. 20. Quoniam ſeries illae, §. 13. in limine demonſtrationis pro quantitatibus $\frac{\mathfrak{B}}{2}$, $\frac{\mathfrak{C}}{3}$, $\frac{\mathfrak{D}}{4}$, etc. allatae, valde conuergunt, facile erit differentiam veram inter ſummam ſeriei reciprocae numerorum primorum et logarithmum ſummae ſeriei harmonicae naturalis aſſignare. Reperitur enim:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} = 0,22527$$
$$\tfrac{1}{3}\mathfrak{C} = 0,05823$$
$$\tfrac{1}{4}\mathfrak{D} = 0,01913$$
$$\tfrac{1}{5}\mathfrak{E} = 0,00714$$
$$\tfrac{1}{6}\mathfrak{F} = 0,00284$$
$$\tfrac{1}{7}\mathfrak{G} = 0,00118$$
$$\tfrac{1}{8}\mathfrak{H} = 0,00051$$
$$\tfrac{1}{9}\mathfrak{I} = 0,00022$$
$$\text{Reliqui} = 0,00018$$
$$\text{Summa} \quad 0,31470$$

Cum igitur ſit

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{D} + \text{etc.} = 0,31470,$$

erit

$$l\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.}) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}) = 0,31470,$$

quae tamen differentia non impedit quo minus aequales dicamus quantitates infinitas:

$$l\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.}) \text{ et}$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \text{etc.}$$

## ARTICVLVS III.

§. 21. Supra §. 14. ad hanc perducti fuimus ſummationem:

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \text{etc.} = 1 - l\,2,$$

quae ſeries reſpectu legis euidentiſſimae, qua progreditur, haud minus memorabilis eſt ac illa ſeries quam Eulerus olim dedit (*g*) ſcilicet:

$\tfrac{1}{8} +$

(*g*) Comment. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. IX. pag. 163.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \text{etc.} = 1 - l\,2.$$

Aequalitas quae inter has ambas ſeries prorſus ſingulares ſubſiſtit, inducit me poſterioris demonſtrationem directam heic apponere, ex qua ſimul ordo denominatorum aliquanto clarius perſpicietur quam quidem eum ex diſſertatione citata intelligere licet.

## Theorema III.

§. 22. *Si omnes poteſtates impares*

9, 25, 27, 49, 81, 121, 125, 169, 225, etc.

*vnitate minuantur, indeque formetur haec ſeries reciproca:*

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{124} + \frac{1}{168} + \text{etc.}$$

*eius ſumma erit* $1 - l\,2$.

## Demonſtratio.

Conſideretur haec ſeries reciproca numerorum imparium:

$$x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

et cum ſit

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \text{etc.}$$

ſumto $a = 3$ erit

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ablata expulſi erunt omnes denominatores formae $3^n$, hoc eſt termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, etc. ita vt remaneat:

$$x - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

Eodem modo, ſumto $a = 5$, fit

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ſubtracta prodit:

$$x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.}$$

Quod ſi eodem modo extrudantur termini:

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{17},\ \frac{1}{19},\ \text{etc.},$$

eorumque poteſtates, quod fit ſubtrahendo ſucceſſiue ſeries:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{121} + \frac{1}{1331} + \text{etc.}$$

ad dextram tandem ſola vnitas remanebit, eritque

$$x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \text{etc.} = 1,$$

vbi in parte ſiniſtra omnes occurrunt numeri pares, praeter eos qui naſcerentur expulſione denominatorum iam expulſorum, qui ſunt

$$\frac{1}{9},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{49},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{121},\ \frac{1}{125},\ \frac{1}{169},\ \text{etc.}$$

ex euolutione fractionum:

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{26},\ \frac{1}{48},\ \frac{1}{80},\ \frac{1}{120},\ \frac{1}{124},\ \frac{1}{168},\ \text{etc.}$$

oriundi. His igitur vtrinque ablatis, vt in ſiniſtra parte omnes plane numeri pares cum ſigno negatiuo occurrant, habebimus:

$$x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \text{etc.} = 1 - A,$$

denotante A ſeriem terminorum illorum:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{124} + \text{etc.}$$

Reſtituta igitur loco $x$ ſerie aſſumta erit:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \text{etc.} = l\,2 = 1 - A,$$

ideoque

$$A = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \text{etc.} = 1 - l\,2.$$

Q. E. D.

ARTI-

## ARTICVLVS IV.

§. 23. Huic poſtremae ſummationi, affinitatis inter methodum in ſummando adhibitam atque legem progreſſionis cauſſa ſequentem denique hic adiungam:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \frac{1}{728} + \text{etc.} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6},$$

quam Eulerus pariter in Opere citato (*h*) demonſtrauit, in ſubſidium vocando hanc ſeriem absque demonſtratione vſurpatam:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.}$$

Etiam in ſequenti demonſtratione ordo, ſecundum quem denominatores procedunt, melius, vt mihi quidem videtur, in oculos incurrit, ſimulque veritas ſeriei Bernoullianae (*i*):

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.}$$

perſpicitur alio modo demonſtrata.

## Theorema IV.

§. 24. *Si omnia quadrata quae ſimul ſunt altiores poteſtates, veluti* 16, 64, 81, 256, 625, 729, *etc. vnitate minuantur, indeque formetur haec ſeries reciproca:*

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \frac{1}{728} + \frac{1}{1023} + \text{etc.}$$

*eius ſumma erit* $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$.

## Demonſtratio.

Conſideretur ſeries reciproca quadratorum:

$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

et

(*h*) Commentar. Tomo IX. pag. 171.

(*i*) Iac. Bernoulli Ars coniectandi, pag. 253.

et cum ſit

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \text{etc.}$$

poſito primo $a = 2$ erit

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{etc.}$$

qua ſerie ab illa ſubtracta remanet:

$$x - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

vbi expulſi ſunt omnes muneri formae $2^{2n}$. Sumatur porro $a = 3$, et ſi ſeries inde nata:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \text{etc.}$$

auferatur a ſerie $x$, expulſi erunt termini formae $\frac{1}{3^{2n}}$, prodibitque

$$x - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{100} + \text{etc.}$$

Eodem modo ſi extrudantur ſucceſſiue termini formae $\frac{1}{5^{2n}}$, $\frac{1}{6^{2n}}$, $\frac{1}{7^{2n}}$, etc. prodibit

$$x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{35} - \frac{1}{48} - \frac{1}{99} - \frac{1}{120} - \text{etc.} = 1,$$

vbi in parte ſiniſtra occurrunt omnia quadrata vnitate minuta, praeter ea quae ſimul ſunt altiores poteſtates, veluti

$$\frac{1}{15}, \frac{1}{63}, \frac{1}{80}, \frac{1}{255}, \frac{1}{624}, \text{etc.},$$

quibus expellerentur termini iam extruſi. Quodſi igitur ſumma horum terminorum vocetur B, iis vtrinque ablatis habebimus:

$$x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{15} - \frac{1}{24} - \frac{1}{35} - \frac{1}{48} - \frac{1}{63} - \frac{1}{80} - \text{etc.} = 1 - B,$$

vnde concluditur fore:

$$B = 1 - x + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \text{etc.}$$

Eſt

Eſt vero

$$\frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right);$$

conſequenter

$$\frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$
$$\frac{1}{3^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right),$$
$$\frac{1}{4^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$
$$\frac{1}{5^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right),$$

etc. etc.

quibus ſubſtitutis colligitur fore:

$$B = 1 - x = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.} \\ \qquad\quad - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \text{etc.} \end{array}\right].$$

ideoque, ob $x = \frac{\pi^2}{6}$, erit

$$B = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \text{etc.} = \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Q. E. D.

## ADDITAMENTVM.

§. 25. In diſſertatione Cel. Fontanae, iam ſaepius laudata, pag. 137. ſtatuitur functionem $Z$, ex pluribus variabilibus $x$, $y$, $u$, $v$, etc. compoſitam, euaneſcere non poſſe, poſito $x = b$ et $y = a$, niſi fuerit formae $Z = P(y-a)^n + Q(x-b)^m$, quae aſſertio ſi vera eſſet, inde ſequeretur, omnia differentialia partialia huiusmodi functionis $Z$, veluti $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)$, etc. quoque euaneſcere, poſito $y = a$ et $x = b$, ſolo caſu $n = m = 1$ excepto; cum tamen infinitae dentur huiusmodi functiones, quarum differentialia $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ non euaneſcunt, ſumto $x = b$ et $y = a$, etiamſi reliqua, puta $\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)$, etc. hac poſitione ſemper in nihilum

 abeant,

abeant, quemadmodum Eulerus et alii demonſtrauerunt, excipiendo ab hac euaneſcentia differentialia $(\frac{\partial Z}{\partial x})$ et $(\frac{\partial Z}{\partial y})$, non quia *nunquam*, ſed quia *non ſemper*, vt reliqua, in nihilum abeunt.

Tantum autem abeſt vt functio Z neceſſario formam $P(y - a)^n + Q(x - b)^m$ habere debeat, vt potius infinitas functiones Z aſſignare liceat, quae euaneſcant poſito $y = a$ et $x = b$, quamuis in forma illa non contineantur. Huiusmodi ſunt, exempli gratia, functiones:

$$Z = P(xy - ab),$$

$$Z = P(by - ax),$$

$$Z = P\,l\,(2 - \frac{xy}{ab}),$$

$$Z = P\,l\,\frac{y}{2a - y} + Q\,l\,\frac{x}{2b - x},$$

$$Z = P(xy - ab) + Q(by - ax),$$

et innumerae aliae, quarum differentialia $(\frac{\partial Z}{\partial x})$ et $(\frac{\partial Z}{\partial y})$ non euaneſcunt, poſito $y = a$ et $x = b$, quamquam reliqua omnia in nihilum abeant.

SUR

# SUR LES
# LISTES DES MARIAGES, DES NAISSANCES ET DES MORTS À St. PÉTERSBOURG,

## MÉMOIRE TROSIEME CONTENANT LA PÉRIODE DE 1786 JUSQU'EN 1790.

Par
*W. L. KRAFFT.*

*Communiqué à l'Académie le 23 Aout 1792.*

Je continue dans ce Mémoire le travail que j'ai entrepris ſur les Liſtes de la fécondité & de la mortalité à St. Pétersbourg & dont j'ai rendu compte à l'Académie dans deux Mémoires précédans; le premier (*) embraſſe la période de 1764 à 1780; le ſeconde (**) celle de 1781 à 1785; c'eſt maintenant la ſuite de ces Liſtes pour la période de 1786 à 1790 que je vais avoir l'honneur de lui preſenter, rédigée ſur le même Plan que j'ai tracé dans mon premier Mémoire, & accompagnée des rémarques que j'ai cru pouvoir en tirer. Je ne m'étendrai plus ici ſur l'utilité de ces ſortes d'obſervations;



(*) Voy. les Actes de l'Acad. pour l'an 1782.
(**) Nouv. Actes de l'Acad. T. IV.

tions; j'en ai donné un tableau méthodique dans mon premier Mémoire. La ſeule choſe que je dois répéter encore ici, eſt que dans ce travail mon but principal étoit & l'eſt encore, 1°.) de faire ſentir par l'emploi des Tables d'une ſeule ville, que quand on en a de pareilles pour des Provinces ou pour des Gouvernemens entiers de la Ruſſie, on pourroit en tirer des lumieres & des inſtructions qui ont un rapport intime à l'avantage de l'humanité & au bien-être de la population; 2°.) de faire voir, ſous quels points de vue & de quelle façon un Bureau établi exprès pour la rédaction de ces Tables, devroit les rédiger & les examiner pour être à même d'en tirer de ſemblables concluſions. Notre tres-gracieuſe Souveraine a ajouté à tant d'actions de bienfaiſance qui rendent Son regne ſi cher à Ses peuples & à l'humanité, auſſi celle d'ordonner en 1764 la formation de pareilles Liſtes; on doit donc en avoir de conſtruites depuis ce tems-la; je me feliciterai infiniment, ſi l'emploi que j'ai fait de celles d'une ſeule Ville, pourra aſſés mériter l'attention du Gouvernement pour en faire un ſemblable de celles des Provinces entieres. Comme il pourra peut-être y avoir dans les Actes de l'Académie une ſuite de Mémoires ſur cet objet; il eſt bon ſans doute de les mettre dans une liaiſon perpetuelle & de leur conſerver autant d'analogie que poſſible; c'eſt pourquoi j'ai lié chaque Mémoire à celui qui précéde, titre par titre & rémarque par rémarque; c'eſt auſſi par cette raiſon & par d'autres encore, que j'ai cru devoir répéter quelquefois les mêmes rémarques; le lecteur eſt prié de faire grace à ces ſortes de rédites en faveur de l'intention.

I.) Ta-

## I. Table générale des nombres annuels des Mariages, des Naiſſances & des Morts.

| Année | Mariages | Naiſſances | Morts. |
|---|---|---|---|
| 1786 | 1508 | 6137 | 7751 |
| 1787 (*) | 1416 | 6628 | 4217 |
| 1788 (**) | 1319 | 6204 | 7627 |
| 1789 | 1306 | 6248 | 8422 |
| 1790 | 1406 | 6347 | 8879 |
| 1826 jours | 6955 | 31564 | 36896 |

## II. Table ſpéciale des nombres annuels des Mariages.

| Année | A | B | C | D | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1786 | 1072 | 102 | 235 | 99 | 1508 |
| 1787 | 1037 | 123 | 169 | 87 | 1416 |
| 1788 | 958 | 86 | 170 | 105 | 1319 |
| 1789 | 929 | 98 | 172 | 107 | 1306 |
| 1790 | 1013 | 104 | 188 | 101 | 1406 |
| 1826 jours | 5009 | 513 | 934 | 499 | 6955 |

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entre des Veufs & des Veuves.



(*) Le 7 Janvier S. M. J. partit pour viſiter les provinces meridionales de ſon empire & en revint le 11 Juillet.
Le 15 d'Aout les Turcs declarereut la guerre à la Ruſſie:

(**) Cette année le Roi de Suede declara la guerre à la Ruſſie, qui fut terminée par la paix conclue le 9 d'Aout 1790.

## III. Table ſpéciale des nombres annuels des Naiſſances.

| Année | Garçons | Filles | Somme | Dans ces nombres il y a des Enfans venus morts au monde. Garçons | Filles | Somme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1786 | 3227 | 2910 | 6137 | 8 | 5 | 13 |
| 1787 | 3406 | 3222 | 6628 | 10 | 6 | 16 |
| 1788 | 3268 | 2936 | 6204 | 15 | 12 | 27 |
| 1789 | 3254 | 2994 | 6284 | 10 | 10 | 20 |
| 1790 | 3204 | 3143 | 6347 | 13 | 11 | 24 |
| 1826 jours | 16359 | 15205 | 31564 | 56 | 44 | 100 |

Sous le titre des Enfans venus morts au monde les tables comprennent auſſi ceux qui ſont morts avant le Batême.

## IV. Table ſpéciale des nombres annuels des Morts.

| Année | Mâles | Fémell. | Somme | Dans ces nombres il y a des Corps trouvés morts. Mâles | Fémell. | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1786 | 5989 | 1762 | 7751 | 24 | 8 | 32 |
| 1787 | 2783 | 1434 | 4217 | 19 | 2 | 21 |
| 1788 | 5549 | 2078 | 7627 | 5 | 0 | 5 |
| 1789 | 6573 | 1849 | 8422 | 23 | 2 | 25 |
| 1790 | 7094 | 1785 | 8879 | 20 | 2 | 22 |
| 1826 jours | 27988 | 8908 | 36896 | 91 | 14 | 105 |

Dans ces nombres des morts on a compté auſſi les enfans venùs morts au monde conſignés dans la table précédente.

V. Ta-

## V. Table ſpéciale des Morts du ſexe maſculin rangés ſelon leur âge.

| Age des morts. | 1786 | 1787 | 1788 | 1789 | 1790 | Sommes. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Enfans venus morts. | 8 | 10 | 15 | 10 | 13 | 56 |
| Entre 0 — 1 an | 477 | 353 | 271 | 126 | 98 | 1325 |
| 1 — 2 | 225 | 249 | 563 | 581 | 488 | 2106 |
| 2 — 3 | 42 | 38 | 38 | 31 | 31 | 180 |
| 3 — 5 | 28 | 30 | 25 | 29 | 18 | 130 |
| 5 — 10 | 59 | 48 | 81 | 78 | 46 | 312 |
| 10 — 15 | 61 | 42 | 101 | 117 | 96 | 417 |
| 15 — 20 | 145 | 114 | 177 | 129 | 357 | 922 |
| 20 — 25 | 872 | 237 | 961 | 1449 | 1225 | 4744 |
| 25 — 30 | 853 | 223 | 781 | 1031 | 1238 | 4126 |
| 30 — 35 | 869 | 328 | 769 | 997 | 1379 | 4342 |
| 35 — 40 | 497 | 199 | 355 | 352 | 562 | 1965 |
| 40 — 45 | 531 | 263 | 413 | 763 | 708 | 2678 |
| 45 — 50 | 306 | 140 | 255 | 288 | 201 | 1190 |
| 50 — 55 | 287 | 142 | 178 | 184 | 211 | 1002 |
| 55 — 60 | 177 | 82 | 127 | 95 | 82 | 563 |
| 60 — 65 | 208 | 87 | 185 | 105 | 139 | 724 |
| 65 — 70 | 80 | 58 | 67 | 61 | 62 | 328 |
| 70 — 75 | 122 | 47 | 102 | 61 | 67 | 399 |
| 75 — 80 | 39 | 41 | 33 | 29 | 17 | 159 |
| 80 — 85 | 57 | 21 | 34 | 22 | 28 | 162 |
| 85 — 90 | 13 | 5 | 10 | 8 | 6 | 42 |
| 90 — 95 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 13 |
| 95 — 100 | 6 | 3 | 0 | 2 | 0 | 11 |
| deſſûs 100 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Somme - - - | 5965 | 2764 | 5544 | 6550 | 7074 | 27897 |

VI. Ta-

## VI. Table ſpéciale des Morts du ſexe feminin rangés ſelon leur âge.

| Age des morts. | 1786 | 1787 | 1788 | 1789 | 1790 | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Enfans venus morts | 5 | 6 | 12 | 10 | 11 | 44 |
| Entre 0 — 1 an. | 512 | 350 | 254 | 137 | 98 | 1351 |
| 1 — 2 | 58 | 53 | 37 | 18 | 33 | 199 |
| 2 — 3 | 42 | 47 | 28 | 15 | 8 | 140 |
| 3 — 5 | 82 | 100 | 480 | 472 | 430 | 1564 |
| 5 — 10 | 36 | 39 | 57 | 49 | 43 | 224 |
| 10 — 15 | 23 | 30 | 39 | 54 | 48 | 194 |
| 15 — 20 | 44 | 53 | 56 | 60 | 48 | 261 |
| 20 — 25 | 66 | 67 | 115 | 158 | 126 | 532 |
| 25 — 30 | 108 | 70 | 97 | 70 | 86 | 431 |
| 30 — 35 | 98 | 85 | 107 | 149 | 133 | 572 |
| 35 — 40 | 82 | 56 | 98 | 61 | 84 | 381 |
| 40 — 45 | 85 | 76 | 99 | 134 | 119 | 513 |
| 45 — 50 | 69 | 65 | 71 | 56 | 55 | 316 |
| 50 — 55 | 65 | 48 | 89 | 93 | 86 | 381 |
| 55 — 60 | 71 | 60 | 80 | 62 | 65 | 138 |
| 60 — 65 | 94 | 63 | 102 | 94 | 121 | 474 |
| 65 — 70 | 55 | 43 | 79 | 40 | 55 | 272 |
| 70 — 75 | 81 | 61 | 92 | 62 | 81 | 377 |
| 75 — 80 | 35 | 20 | 38 | 21 | 22 | 136 |
| 80 — 85 | 26 | 27 | 22 | 16 | 23 | 114 |
| 85 — 90 | 10 | 8 | 13 | 8 | 6 | 45 |
| 90 — 95 | 5 | 2 | 6 | 6 | 2 | 21 |
| 95 — 100 | 2 | 1 | 6 | 2 | 0 | 11 |
| deſſus 100 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| Somme. | 1754 | 1432 | 2078 | 1847 | 1783 | 8894 |

VII. Ta-

## V. Table reduite des morts rangés ſelon leur âge.

| Age des morts. | De 1000 morts du ſexe maſculin il y a | De 1000 morts du ſexe feminin il y a | De 1000 morts pris en géneral il y a |
|---|---|---|---|
| Enfans venus morts | 2, 01 | 4, 95 | 2, 72 |
| Entre 0 — 1 an | 47, 50 | 151, 90 | 72, 73 |
| 1 — 2 | 75, 49 | 22, 37 | 62, 65 |
| 2 — 3 | 6, 45 | 15, 74 | 8, 70 |
| 2 — 5 | 4, 56 | 175, 84 | 46, 04 |
| 5 — 10 | 11, 18 | 25, 18 | 14, 57 |
| 10 — 15 | 14, 95 | 21, 81 | 16, 61 |
| 15 — 20 | 33, 05 | 29, 35 | 32, 15 |
| 20 — 25 | 170, 05 | 59, 91 | 143, 40 |
| 25 — 30 | 147, 91 | 48, 46 | 123, 86 |
| 30 — 35 | 155, 64 | 64, 31 | 133, 56 |
| 35 — 40 | 70, 44 | 42, 84 | 63, 76 |
| 40 — 45 | 95, 99 | 57, 68 | 86, 73 |
| 45 — 50 | 42, 66 | 35, 53 | 40, 93 |
| 50 — 55 | 35, 92 | 42, 84 | 37, 59 |
| 55 — 60 | 20, 18 | 38, 00 | 24, 49 |
| 60 — 65 | 25, 95 | 53, 29 | 32, 56 |
| 65 — 70 | 11, 76 | 30, 53 | 16, 31 |
| 70 — 75 | 14, 30 | 42, 39 | 21, 09 |
| 75 — 80 | 5, 70 | 15, 29 | 8, 02 |
| 80 — 85 | 5, 81 | 12, 82 | 7, 50 |
| 85 — 90 | 1, 50 | 5, 06 | 2, 36 |
| 90 — 95 | 0, 47 | 2, 36 | 0, 92 |
| 95 — 100 | 0, 49 | 1, 24 | 0, 60 |
| deſſûs 100 | 0, 03 | 0, 34 | 0, 11 |

# VIII. Table de la vitalité des âges des hommes à St. Pétersbourg.

telle, qu'elle ſert aux calculs des Rentes viagéres & d'autres établiſſemens de ce genre.

| | De 1000 Garçons nouveaux nés. | De 1000 Filles nouvellement nées. | De 1000 Enfans nouveaux nés. |
|---|---|---|---|
| Viennent vivans au monde | 997, 99 | 995, 05 | 997, 28 |
| Accompliſſent la 1 année. | 950, 49 | 843, 15 | 924, 55 |
| 2 — — | 875, 00 | 820, 78 | 861, 90 |
| 3 — — | 868, 55 | 805, 04 | 853, 20 |
| 5 — — | 863, 89 | 629, 20 | 807, 16 |
| 10 — — | 852, 72 | 604, 02 | 792, 59 |
| 15 — — | 837, 76 | 582, 21 | 775, 98 |
| 20 — — | 804, 71 | 552, 86 | 743, 83 |
| 25 — — | 634, 66 | 493, 05 | 600, 43 |
| 30 — — | 486, 75 | 444, 59 | 476, 57 |
| 35 — — | 331, 11 | 380, 28 | 343, 01 |
| 40 — — | 260, 67 | 337, 44 | 279, 25 |
| 45 — — | 164, 68 | 279, 76 | 192, 52 |
| 50 — — | 122, 02 | 244, 23 | 151, 59 |
| 55 — — | 86, 10 | 201, 39 | 114, 00 |
| 60 — — | 65, 92 | 163, 39 | 89, 51 |
| 65 — — | 39, 97 | 110, 10 | 56, 95 |
| 70 — — | 28, 21 | 79, 52 | 40, 64 |
| 75 — — | 13, 91 | 37, 13 | 19, 55 |
| 80 — — | 8, 21 | 21, 84 | 11, 53 |
| 85 — — | 2, 40 | 9, 02 | 4, 03 |
| 90 — — | 0, 90 | 3, 96 | 1, 67 |
| 95 — — | 0, 43 | 1, 60 | 0, 75 |
| 100 — — | 0, 04 | 0, 36 | 0, 15 |

IX. Ta-

# IX. Table ſpéciale des Morts du ſexe maſculin.

rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

| Maladies & cauſes de la mort. | 1786 | 1787 | 1788 | 1789 | 1790 | Somme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pleureſie - - - - - | 676 | 582 | 821 | 864 | 557 | 3500 |
| Fievre chaude - - - | 2512 | 903 | 2513 | 3051 | 3208 | 12187 |
| Conſomption - - - | 713 | 421 | 612 | 810 | 753 | 3309 |
| Convulſions - - - - - | 132 | 90 | 117 | 103 | 99 | 541 |
| Vieilleſſe - - - - - - | 213 | 102 | 155 | 102 | 135 | 707 |
| Dyſſenterie - - - - | 639 | 180 | 686 | 853 | 1453 | 3811 |
| Petite verole - - - - | 32 | 18 | 57 | 109 | 66 | 282 |
| Hydropiſie - - - - - | 244 | 146 | 161 | 166 | 180 | 897 |
| Malheur - - - - - - | 12 | 31 | 15 | 19 | 13 | 90 |
| Apoplexie - - - - - | 110 | 137 | 123 | 116 | 163 | 649 |
| Scorbut - - - - - - | 610 | 89 | 163 | 283 | 316 | 1461 |
| Dentition - - - - - - | 32 | 13 | 27 | 18 | 13 | 103 |
| Epilepſie - - - - - - | 10 | 6 | 16 | 5 | 6 | 43 |
| Verole - - - - - - | 0 | 4 | 15 | 5 | 69 | 93 |
| Rougeole - - - - - - | 1 | 0 | 2 | 8 | 2 | 13 |
| Esquinancie - - - - - | 6 | 9 | 16 | 5 | 5 | 41 |
| Phreneſie - - - - - - | 0 | 3 | 5 | 10 | 4 | 22 |
| Etouffem. des enfans au ſommeil p. la mere - | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Yvrognerie - - - - - | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Fievre - - - - - - - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Pierre - - - - - - - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Maladies inconnues - - | 14 | 20 | 24 | 13 | 19 | 90 |
| Sommes - - - | 5957 | 2754 | 5529 | 6540 | 7061 | 27841 |

## X. Table ſpéciale des Morts du ſexe feminin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

| Maladies & cauſes de la mort. | 1786 | 1787 | 1788 | 1789 | 1790 | Somme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pleureſie - - - - - | 537 | 446 | 629 | 468 | 441 | 2521 |
| Fievre chaude - - - - | 314 | 232 | 369 | 391 | 364 | 1670 |
| Conſomption - - - - | 306 | 251 | 374 | 310 | 361 | 1602 |
| Convulſions - - - - - | 109 | 72 | 67 | 76 | 72 | 396 |
| Vieilleſſe - - - - - - - | 212 | 150 | 239 | 157 | 179 | 937 |
| Dyſſenterie - - - - - | 41 | 33 | 54 | 56 | 38 | 222 |
| Petite verole - - - - - | 24 | 20 | 59 | 110 | 73 | 286 |
| Hydropiſie - - - - - | 73 | 50 | 72 | 74 | 78 | 347 |
| Malheurs - - - - - - - | 2 | 4 | 8 | 6 | 5 | 25 |
| Apoplexie - - - - - | 41 | 49 | 62 | 44 | 42 | 238 |
| Scorbut - - - - - - - | 18 | 24 | 31 | 39 | 21 | 133 |
| Enfantement - - - - - | 42 | 47 | 44 | 62 | 62 | 257 |
| Dentition - - - - - | 16 | 15 | 21 | 12 | 14 | 78 |
| Epilepſie - - - - - - - | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 12 |
| Verole - - - - - - - | 0 | 5 | 5 | 1 | 2 | 13 |
| Rougeole - - - - - - - | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 8 |
| Eſquinancie - - - - - | 2 | 3 | 8 | 4 | 0 | 17 |
| Phreneſie - - - - - - - | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 9 |
| Etouffem. des enfans - - au ſommeil p. la mere - | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Yvrognerie - - - - - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Fievre - - - - - - - - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Pierre - - - - - - - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Malad. inconnues - - - | 7 | 20 | 20 | 17 | 74 | 78 |
| Sommes - - | 1740 | 1426 | 2066 | 1837 | 1772 | 8850 |

XI. Ta-

# XI. Table reduite des morts

rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

| Maladies ou cauſes de la mort. | De 1000 morts du ſexe maſculin il y a | De 1000 morts du ſexe feminin il y a | De 1000 morts pris en général il y a |
|---|---|---|---|
| Pleureſie - - - | 125, 71 | 284, 85 | 164, 10 |
| Fievre chaude - - | 437, 74 | 188, 70 | 377, 67 |
| Conſomption - - | 118, 86 | 181, 02 | 133, 04 |
| Convulſions - - | 19, 43 | 44, 74 | 25, 54 |
| Vieilleſſe - - - | 25, 39 | 105, 87 | 44, 81 |
| Dyſſenterie - - - | 136, 88 | 25, 08 | 109, 92 |
| Petite verole - - | 10, 13 | 32, 31 | 15, 48 |
| Hydropiſie - - - | 32, 22 | 39, 21 | 33, 90 |
| Malheurs - - - | 3, 23 | 2, 82 | 3, 13 |
| Apoplexie - - - | 23, 31 | 26, 89 | 24, 17 |
| Scorbut - - - - | 52, 48 | 15, 03 | 43, 44 |
| Enfantement - - | | 29, 04 | 7, 00 |
| Dentition - - - | 3, 69 | 8, 81 | 4, 94 |
| Epilepſie - - - | 1, 64 | 1, 35 | 1, 50 |
| Verole - - - - | 3, 34 | 1, 47 | 2, 93 |
| Rougeole - - - | 0, 47 | 0, 91 | 0, 57 |
| Eſquinancie - - | 1, 47 | 1, 92 | 1, 58 |
| Phreneſie - - - | 0, 79 | 1, 01 | 0, 84 |
| Etouff. des enfans au ſommeil par les meres | 0, 03 | 0, 11 | 0, 05 |
| Yvrognerie - - - | 0, 03 | 0, 00 | 0, 02 |
| Fievre - - - - | 0, 00 | 0, 00 | 0, 00 |
| Pierre - - - - | 0, 00 | 0, 00 | 0, 00 |
| Maladies inconnues - | 3, 23 | 8, 81 | 4, 58 |

## XII. Table ſpéciale des morts rangés ſelon les mois.

| | Males. | Femell. | Somme. | | Males. | Fem. | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier. | 1622 | 702 | 2324 | Juillet. | 2095 | 847 | 2942 |
| Février | 1796 | 699 | 2495 | Aout | 1673 | 761 | 2434 |
| Mars | 2810 | 782 | 3592 | Septemb. | 1612 | 634 | 2246 |
| Avril | 4093 | 801 | 4894 | Octobr. | 1557 | 593 | 2150 |
| Mai | 4336 | 888 | 5224 | Novbr. | 1619 | 617 | 2236 |
| Juin | 2968 | 831 | 3799 | Décembr. | 1660 | 695 | 2355 |

Dans ces nombres on ne comprend pas les enfans venus morts, ni les corps trouvés morts.

| | Le plus grand nombre des morts & le mois, où il a eu lieu. | | Le plus petit nombre des morts & les mois, où il a eu lieu. | |
|---|---|---|---|---|
| Année. | Males. | Femelles. | Males. | Femelles. |
| 1786 | Mai 1032 | Aout 194 | Décembr. 238 | Janv. & Nov. 117 |
| 1787 | Juin 291 | Mai 140 | Octobr 186 | Octobr. 86 |
| 1788 | Mai 742 | Juillet 227 | Janvier 288 | Janv. 137 |
| 1789 | Mai 1310 | Mars 188 | Octobr. 303 | Octobr. 119 |
| 1790 | Avrill. 1315 | Aout 265 | Avrill. 220 | Septembr. 90 |

Les Tables précédentes nous fourniſſent d'abord les ſuivans

# Réſultats généraux.

## I. *Etat moyen de la population à St. Pétersbourg dans la periode de 1786 à 1790.*

1.) Dans cette periode il ſe fit à St. Pétersbourg 1391 mariages par an.

2.)

2.) Il y naquit annuellement 6313 enfans; 3272 garçons & 3041 filles.

2.) Il y mourut annuellement 7380 perſonnes; 5598 males & 1782 femelles.

4.) Il y eut un excedant annuel des morts ſur les naiſſances de 1067 perſonnes; il y naquit 1259 femelles plus qu'il n'en mourut, mais il y mourut 2326 males plus qu'il n'en naquit.

II. *Parallele entre les Etats moyens de la Population à St. Péterſbourg dans cinq périodes conſecutives:*

| Nombre annuel des | Periodes. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1764-1770 | 1771-1775 | 1776-1780 | 1781-1785 | 1785-1709 |
| Mariages - - | 1351 | 1221 | 1305 | 1368 | 1391 |
| Naiſſances | | | | | |
| Garçons - - | 2592 | 2639 | 2898 | 3004 | 3272 |
| Filles - - - | 2530 | 2476 | 2740 | 2885 | 3041 |
| Total - - | 5122 | 5115 | 5638 | 5889 | 6313 |
| Morts | | | | | |
| Males - - - | 3036 | 3243 | 2752 | 3474 | 5598 |
| Femelles - - | 1641 | 1677 | 1559 | 1688 | 1782 |
| Total - - | 4677 | 4921 | 4311 | 5162 | 7380 |
| Excédant des naiſſances. | | | | | |
| en Males - | — 444 | — 605 | — 146 | — 470 | — 2326 |
| en Fémelles | + 889 | + 799 | + 1181 | + 1197 | + 1259 |
| Total - - | + 445 | + 194 | + 1327 | + 727 | — 1067. |

Le

Le ſigne + indique, que le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & le ſigne — en marque le contraire.

1.) La derniere de ces 5 periodes, celle de 1785 à 1790 ſe diſtingue avantageuſement des précédentes par le plus grand nombre des mariages & des naiſſances. Ces deux nombres vont, depuis 1775, en augmentant de période en période.

2.) Mais la derniere periode ſe diſtingue auſſi desavantageuſement des précédentes en ce qu'il y eut un excedant conſiderable des morts ſur les naiſſances au lieu que dans les 4 periodes précédentes il y en eut un des naiſſances ſur les morts. Nos Tables font voir qu'à l'égard des fémelles le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & qu'il en eſt arrivé toujours le contraire par rapport aux mâles; mais dans la derniére période le nombre des morts mâles a tant ſurpaſſé celui des naiſſances mâles que malgré le fort excedant des naiſſances ſur les morts en fémelles, il y en eut, dans la totalité, un des morts ſur les naiſſances de 1067 hommes. Dans les grandes villes le nombre des morts eſt ordinairement ſuperieur à celui des naiſſances; ce n'eſt cependant que la derniére période qui en offre l'exemple pour St. Pétersbourg; la 9^me^ de nos Tables & les remarques qui s'y rapportent, rendent viſible dans ſa ſource la mortalité extraordinairement forte des males qui a eu lieu dans cette période.

Outre ces reſultats généraux, les Tables données cideſſus nous fourniſſent encore les ſuivantes

Rémar-

# Rémarques ſpéciales

**rélatives aux titres que j'ai établis dans mon premier Mémoire.**

## I. Nombre moyen des habitans à St. Pétersbourg & rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers.

1.) L'Arithmetique politique ſe ſert ſouvant des Liſtes des mariages, des naiſſances & des morts d'une ville, d'une Province &c. pour calculer le nombre de ſes habitans; c'eſt ordinairement toute l'utilité qu'on en retire; j'ai fait voir dans mes deux Mémoires précédans, que l'on peut tirer des pareilles Liſtes des concluſions bien plus importantes ſi le nombre des vivans qu'elles embraſſent, eſt donné. Nous jouiſſons de cet avantage à l'égard de la derniere période; le denombrement fait en 1789 par ordre de la Police a donné la population de St. Pétersbourg de 217948 perſonnes, 148520 mâles & 69428 fémelles. Par un ſemblable denombrement fait dans la période précédente, en 1784, on l'avoit trouvée de 192246 perſonnes, 126827 males & 65619 fémelles; donc dans l'intervalle de 5 ans elle s'eſt augmentée de 25502 perſonnes, 21693 males & 3809 fémelles, & la population de la Ville dans la derniere période eſt à celle qui y a eu lieu dans la période précédente, en raiſon de 113 à 100; or nos Tables font voir que dans la derniere période il y a eu un excedant des morts ſur les naiſſances; il s'en ſuit, que l'accroiſſement qui a eu lieu dans la derniére période, n'eſt point reſulté de la vigueur interne de la population, mais uniquement d'une forte affluence de monde dans cette Capitale.

2.) La ville de St. Pétersbourg étant aſſiſe, comme je l'ai dit dans le Mémoire précédant, ſur une ſurface de 49 Werſtes quarrées; il vient pour la derniere période 4448 hommes ſur une Werſte quarrée, 472 de plus que dans la période précédente.

3.) Il auroit été utile, ſi l'on eut continué, comme on l'avoit fait pour les années 1764 & 1765, de diſtinguer dans les tables de St. Pétersbourg les nationaux d'avec les étrangers; j'ai fait voir dans mon premier Mémoire qu'une pareille diſtinction fournit des rémarques tres-intereſſantes ſur la difference qui ſubſiſte dans la fécondité, la mortalité & la force des maladies des uns & des autres. Pour y ſuppléer autant que poſſible, je joins ici une Table, ſemblable à celle que j'ai donnée pour la période précédente dans mon ſécond Mémoire, elle eſt tirée des regiſtres de toutes les Paroiſſes étrangéres de la Ville; mais elle a encore ainſi que la précédente, le defaut de ne marquer ni l'âge ni le genre des maladies des morts.

## Etat des Mariages, des Naiſſances & des Morts des Etrangers à St. Pétersbourg, depuis 1786 jusqu'en 1790.

| | Mariages. | Naiſſances. | | | Morts. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Garç. | Filles | Sommes | Hommes | Femmes | Sommes |
| 1786 | 233 | 412 | 357 | 769 | 468 | 350 | 818 |
| 1787 | 226 | 430 | 409 | 839 | 371 | 295 | 666 |
| 1788 | 214 | 454 | 355 | 809 | 547 | 404 | 951 |
| 1789 | 203 | 439 | 402 | 841 | 483 | 398 | 881 |
| 1790 | 252 | 433 | 427 | 860 | 387 | 377 | 764 |
| Total. | 1128 | 2168 | 1950 | 4118 | 2256 | 1824 | 4080 |

En

En prenant les ſommes totales de cette table & en les comparant avec les ſommes reſpectives pour les nationaux, on trouve le rapport

| entre les nombres: | | ces rapports on été dans la periode précédente: |
|---|---|---|
| des mariages | = 51 : 10 | = 51 : 10 |
| des naiſſances | = 67 : 10 | = 70 : 10 |
| des morts | = 80 : 10 | = 57 : 10 |

On voit d'abord que le rapport des mariages a été le même dans ces deux périodes, & que celui des naiſſances a peu changé; mais celui des morts eſt monté de 57 à 80; & comme celà eſt encore un effet de la forte mortalité qui a eu lieu dans la derniere période, nous n'employerons pour calculer le rapport du nombre des étrangers à celui des nationaux, que le rapport des mariages 51 à 10, & celui des naiſſances 67 à 10. Le rapport moyen de ces deux eſt celui de 59 à 10 au lieu de 60½ à 10 qu'il a été dans la période précédente. On peut donc établir avec bien de probabilité, que dans la derniere période on comptoit à St. Pétersbourg 59 nationaux ſur 10 étrangers, & que dans la population totale de 217948 perſonnes il y avoit 186361 nationaux & 31587 étrangers & 145 étrangers ſur 1000 habitans (*). En employant d'une maniere ſemblable le rapport de 60½ à 10 qui a eu lieu dans la période précédente, dans la population totale de 192446 perſonnes, il y avoit alors 165147 nationaux & 27299 étrangers, de façon que dans la derniere période le nombre des nationaux à St. Pétersbourg s'eſt augmenté de 21214 & celui des étrangers de 4288 perſonnes.



(*) Il peut être utile dans quelques cas d'avoir les états ſpécials des Mariages, des Naiſſances & des Morts de chacune des Nations étrangeres ou re-

## II. Fécondité intentionelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1391, calcul moyen de 5 ans; j'en tire le rapport au nombre de la population ou la meſure de la fécondité intentionelle = $\frac{1}{156}$, c'eſt à dire, qu'entre 156 perſonnes il ſe fit un mariage par an ou bien que de 78 perſonnes il y eut annuellement une qui s'eſt mariée. Cette fécondité intentionelle, tres-petite en elle même, eſt encore de beaucoup inferieure à celle que j'ai trouvée pour la periode précédente où elle a été = $\frac{1}{145}$. Pour ce qui concerne les étrangers, la meſure de leur fécondité intentionelle ſe trouve = $\frac{1}{140}$ pour la derniere période au lieu de $\frac{1}{122}$ qu'elle a été dans la précédente; elle a donc été auſſi ſenſiblement diminuée. Quoique donc la derniere période ſe diſtingue des autres par le plus grand nombre des mariages; cependant eu égard à l'accroiſſement de la population, la fécondité intentionelle ou bien la diſpoſition à ſe marier étoit alors éffectivement moindre que dans la periode précédente, en raiſon de 140 à 156.

2.)

ligions à part qui ſe trouvent établies dans la Ville; voici ce que j'ai pû obtenir à cet égard par les regiſtres des differentes Paroiſſes pour ce période de 1786 à 1790.

| | Mariages | Naiſſances | Morts. |
|---|---|---|---|
| Allemands Lutheriens - - | 695 | 2421 | 2311 |
| — — Réformés - - | 18 | 92 | 73 |
| François réformés - - - | 14 | 42 | 31 |
| Catholiques - - - - - - | 132 | 532 | 475 |
| Finnois - - - - - - - | 129 | 579 | 752 |
| Suedois - - - - - - - | 79 | 291 | 328 |
| Anglois - - - - - - - | 53 | 122 | 69 |
| Hollandois - - - - - - | 5 | 27 | 12 |
| Armeniens - - - - - - | 3 | 12 | 29 |
| Total - - - - - - | 1128 | 4118 | 4080 |

2.) Le nombre des Veuves qui ſe ſont remariées, a ſurpaſſé celui des Veufs qui ont paſſé à des ſécondes nôces, dans la derniere période preciſement autant que dans la précédente, en raiſon de 7 à 5. Quelle pourroit être la cauſe d'un euenement ſi conſtant & dont par tout ailleurs il arrive le contraire?

## III. Fécondité réelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été = 6313, dans le quel il y avoit 3272 garçons & 3041 filles; calcul moyen de 5 ans; j'en tire le rapport au nombre moyen annuel des mariages ou la meſure de la fécondité réelle = 4, 5, c'eſt à dire, qu'on comptoit 45 naiſſances ſur 10 mariages; c'eſt une forte fécondité réelle pour une grande ville; elle a été auſſi dans la derniere periode plus forte que dans les précédentes, où elle fut ſucceſſivement 3, 7; 4, 1; 4, 2; & 4, 3.

2.) Dans la totalité des naiſſances de 31564 enfans il y eut 16359 garçons & 15205 filles: ces deux nombres ſont entre eux en raiſon de 107 à 100; ce qui conſtate encore la rémarque intereſſante qu'on a faite depuis longtems ſur le rapport conſtant du nombre des naiſſances mâles à celui des naiſſances femelles.

## IV. Fécondité générale.

Le nombre moyen annuel des naiſſances a été = 6313; calcul moyen de 5 ans; il en reſulte le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la fécondité générale $= \frac{1}{34}$, c'eſt à dire que ſur 34 habitans il arrivoit une naiſſance par an. Cette fécondité générale eſt ſenſiblement moindre que celle qui a ordinairement lieu dans les grandes villes, & elle va pour St. Pétersbourg en diminuant

de periode en periode, car elle a été ſucceſſivement $\frac{1}{31}$; $\frac{1}{33}$ & dans la dernière periode $\frac{1}{34}$; cette diminution de la fécondité générale eſt une ſuite de celle de la fécondité intentionelle, mais on doit auſſi l'attribuer en partie à l'affluence du monde dans la Capitale qui n'y fait qu'un ſejour paſſager.

## V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été = 7380 dans le quel il y eut 5598 hommes & 1782 femelles; calcul moyen de 5 ans. Le rapport de ce nombre à celui de la population ou la meſure de la mortalité générale a donc été = $\frac{1}{29}$, c'eſt à dire que de 29 perſonnes il en mourut une par an, ou bien 35 de 1000; c'eſt preciſement la même meſure de la mortalité générale qui a également lieu pour d'autres grandes villes.

2.) La mortalité générale dans la derniere période a ſurpaſſé celle qui a eu lieu dans la periode précédente, en raiſon de 128:100. Par l'éffet de cette forte mortalité le nombre des morts a été même ſuperieur à celui des naiſſances; malgré cela cette mortalité, ſi forte pour St. Pétersbourg, ne fait encore qu'égaler celle qui a lieu en de grandes villes; c'eſt que la meſure de la mortalité générale eſt pour St. Pétersbourg ordinairement tres petite n'étant que de $\frac{1}{37}$.

3.) On a cru avoir lieu de ſoupçonner la préciſion des tables de la mortalité de St. Pétersbourg, parce qu'elles donnoint toujours le nombre des naiſſances ſuperieur à celui des morts & que dans les grandes villes il en arrivoit presque par tout le contraire. J'ai fait voir dans les Mémoires précédans, combien ce ſoupçon étoit peu fondé; la derniere période en offre une nouvelle preuve.

4.) Il

4.) Il n'y eût dans cette période qu'une ſeule année (1787) où le nombre des naiſſances a été ſuperieur à celui des morts. Le nombre moyen annuel des naiſſances eſt inférieur à celui des morts en raiſon de 85 à 100. Voici le parallèle de ces rapports dans les 5 périodes conſecutives:

| Période. | Rapport du nombre annuel des naiſſances à celui des morts. |
|---|---|
| 1764 à 1770 | - - 109 à 100 |
| 1771 à 1775 | - - 104 à 100 |
| 1776 à 1780 | - - 130 à 100 |
| 1781 à 1785 | - - 114 à 100 |
| 1786 à 1790 | - - 85 à 100 |

5.) L'excédant annuel des morts ſur les naiſſances qui a eu lieu dans la derniere période, réſulte de la grande mortalité des *hommes*. Dans le nombre annuel de 7380 morts, il y a eu 5598 mâles & 1782 femelles. Donc pour les *hommes* le nombre annuel des naiſſances a été inferieur à celui des morts en raiſon de 58 à 100, au lieu que pour les femelles il l'a ſurpaſſé dans le rapport de 170 à 100.

6.) Le nombre moyen annuel des hommes morts a été dans la derniere période ſuperieur à celui des femelles mortes en raiſon de 314 à 100. Ce rapport extraordinairement fort, & même beaucoup plus fort que celui de la période précédente, s'explique 1.) par le grand excédant du nombre des hommes ſur celui des femelles à St. Pétersbourg; le dernier denombrement fait voir, qu'on y comptoit alors 214 hommes contre 100 femelles 2^do^) par la mortalité plus grande des hommes que des femmes, dés l'âge de 20 ans, 3^tio^) particulierement quant à la dernière période, par les épidemies des Fievres chaudes & des Dyſſenteries en 1789 & 1790,

1790, & par celle du Scorbut en 1786, qui dans ces deux années ont enleué plus d'hommes que dans toute la durée de la période précédente.

## VI. Mortalité ſpéciale de chaque âge.

### 1.) *Nombre des enfans venûs morts au monde.*

1.) Dans la totalité de 31564 naiſſances arrivées dans la derniere période, il y eut 100 enfans de nés-morts; ou bien 3 ſur 1000 naiſſances, & conſéquement plus que dans la période précédente, où il n'y en a pas eu même 2 ſur 1000. La différence qu'on a rémarquée à cet égard entre les deux ſexes dans les périodes précédentes, a été moins ſenſible dans la derniére; dans un nombre égal des naiſſances de l'un & de l'autre ſexe le nombre des garçons nès-morts n'a ſurpaſſé celui des filles venues mortes au monde qu'en raiſon de 17 à 14, au lieu que dans la période précédente il l'a ſurpaſſé en raiſon de 13 à 6 ou bien de 30 à 14.

2.) Le nombre extremement petit des enfans nés-morts à St. Pétersbourg s'explique au moins en partie par la facilité de l'accouchement des meres ruſſes; les tables de la derniere période donnent ſur ce point le même réſultat qu'ont donné les précédentes, ſcavoir que de 1000 meres en couche à St. Pétersbourg, il n'y a que 8 qui ſont les victimes des travaux ou des ſuites de l'enfantement.

### 2. *Mortalité des Enfans nouveaux-nés.*

1.) La meſure de la mortalité de la premiere année de l'âge humain a été dans la derniere période telle que de 1000 enfans nouveaux-nès & mis vivans au monde, il n'en meurt que 73 avant que de l'accomplir, & la mortalité de la

la premiere année n'a enleué qu'$\frac{1}{11}$ de toutes les naiſſances au lieu que dans les périodes précédentes elle en a enlevé $\frac{1}{5}$ & même plus d'un quart. Il s'offre ici une différence frappante entre la Table VII. pour la derniere période & celle pour les précédentes; mais desqu'on ſe rappelle les vrais principes de ces ſortes de calcul, on voit facilement que cette différence eſt occaſionnée par la grande mortalité des *autres âges* qui a eu lieu dans cette période & qui fait qu'on en doit regarder ſurtout les deux dernieres années comme epidémiques.

2.) Je me rapporte à mes deux Mémoires précédens pour ce que j'avois à dire ſur l'importance qu'il y a de connoitre la méſure de la mortalité des enfans nouveaux-nés à la campagne, dans les villes & auſſi dans les maiſons des enfans trouvés; ſur le ſervice & les comptoirs des nourrices, & ſur les avis à donner au peuple à l'égard des maladies & du traitement phyſique des enfans.

3.) *Mortalité de l'Enfance.*

La méſure de la mortalité de l'enfance a été dans la derniere période telle, que de 1000 enfans tous agés d'un an 839 accompliſſent la 15$^{me}$ année & qu'il n'y en a que 161 d'enlevés par la mort pendant cet intervalle des âges. Pour que cette méſure ſe réſentiſſe le moins poſſible de la conſtitution en partie épidemique de la dernière periode pour les autres âges, il conviendra de prendre le milieu entre celle-cy & celles que j'ai trouvées dans les Mémoires precédans; il en réſulte que de 1000 enfans tous agés d'un an à St. Pétersbourg 809 accompliſſent la 15$^{me}$ annee & qu'il n'y en a que 191 d'enlevés par la mort dans cet intervalle des âges. Une ſi forte vitalité de l'enfance eſt peut-être ſans exem-

exemple; les deux nombres que je viens de trouver, ſont une eſpece d'expreſſion arithmétique de la conſtitution vigoureuſe de la nation ruſſe & de ce que la Nature eſt diſpoſée à faire pour en faire accroitre la population.

4.) *Mortalité du moyen âge & de la vieilleſſe.*

C'eſt ici que nos tables font voir une forte mortalité dans la derniere période bien plus que dans les précédentes. De 1000 perſonnes toutes agées de 20 il n'y a, que 120 qui accompliſſent la 60$^{me}$ année & il y en a 880 d'enlevés durant cette belle partie de la vie, conſequemtent 58 plus que dans la période précédente, 336 plus que dans d'autres pays en général & 160 plus que même à Londres qui ſe diſtingue des autres grandes villes par la plus forte mortalité de tous les âges jusqu'à la 60$^{me}$ année de la vie. C'eſt l'effet marqué de l'Épidemie dont j'ai parlé plus haut; elle a attaqué ſurtout le moyen âge, & a été bien plus meurtriere pour les hommes que pour les femmes; car ſelon la méſure de la mortalité de cet âge là telle qu'elle a été dans la derniere période, de 1000 hommes tous agés de 20 ans il meurt 918 dans le dit intervalle des âges, 53 plus que dans la période précédente, au lieu que d'autant de femmes toutes agées de 20 ans il n'y a que 705 d'enlevées dans le même intervalle, & ſeulement 10 de plus que dans la periode précédente.

2.) Dans la derniere période il y a eu 4 perſonnes mortes à l'âge de plus d'un ſiecle.

VII.

## VII. Force des maladies & état de la ſanté publique.

1.) Les maladies qui cauſent généralement à St. Pétersbourg le plus de mortalité, ſont les Fievres chaudes, les Pleureſies & les Conſomtions, mais il y avoit dans la derniere période encore deux ſortes de maladies, la Dyſſenterie & le Scorbut, qui y ont fait plus de ravage que dans aucune autre. Voici les nombres moyens annuels de ceux qui ont été enlevés par ces cinq maladies.

| | Hommes. | Femmes. | Sommes. |
|---|---|---|---|
| Pleureſie - - - | 700 | 504 | 1204 |
| Fievre chaude - | 2437 | 334 | 2771 |
| Conſomtion - - | 662 | 320 | 982 |
| Dyſſenterie - - | 762 | 44 | 806 |
| Scorbut - - - | 292 | 25 | 317 |
| | 4853 | 1227 | 6080 |

Or le nombre moyen annuel de tous les morts ayant été = 7380; il eſt viſible que ces cinq maladies y ont contribué pour plus de $\frac{4}{5}$. On voit auſſi qu'elles ont enlevé bien plus d'hommes que de femmes; car le nombre moyen annuel des hommes morts ayant été = 5598 & celui des femmes mortes = 1782; ces maladies y ont contribué pour presque $\frac{9}{10}$ à la totalité des hommes morts, & pour presque $\frac{7}{10}$ à la totalité des femmes mortes. La mortalité cauſée par les Fievres chaudes a été dans la derniere periode ſenſiblement plus forte que dans la précédente, & la Dyſſenterie & le Scorbut y on fait des ravages extraordinaires, ce qu'on voit le plus clairement dans le tableau ſuivant, qui expoſe combien parmi 1000 morts il y a eu de morts de chacune de ces trois maladies, dans les deux périodes conſecutives:

Parmi 1000 morts du ſexe

| | Maſculin. | | Feminin. | |
|---|---|---|---|---|
| | dern. per. | per. précéd. | dern. per. | per. précéd. |
| Fievre chaude | 437 | 398 | 188 | 165 |
| Dyſſenterie - | 136 | 51 | 25 | 12 |
| Scorbut - - | 52 | 8 | 15 | 3 |

La force de ces trois maladies a donc été dans ces deux périodes conſécutives.

| | pour les hommes en raiſon de | pour les femmes en raiſon de |
|---|---|---|
| Fievre chaude | 109 à 100 | 114 à 100 |
| Dyſſenterie - | 266 à 100 | 208 à 100 |
| Scorbut - - | 650 à 100 | 500 à 100. |

2.) Quant aux maladies des enfans, les Convulſions ont enlevé dans la derniere période annuellement 187 enfans, 108 garùons & 79 filles; la petite verole naturelle a couté la vie à 113 enfans par an, à 56 garçons & à 57 filles. La forçe de ces deux ſortes de maladies d'enfans a été dans la derniere période bien moindre que dans la précédente; les convulſions n'ayant enlevé qu'$\frac{1}{34}$, & la petite verole ſeulement $\frac{1}{55}$ de la totalité des naiſſances. Dans les cinq ans de la dernière période la petite verole n'a enlevé que 568 enfans; elle en a enlevé presque deux fois autant dans les cinq ans de la période précédente. Sept fois ce nombre ou 3976 a donc été probablement le nombre des malades de la petite verole dans la derniere période; il n'en ſeroit mort probablement que 12, en raiſon de 3 par 1000, s'ils avoient été inoculés; l'Inoculation auroit ſauué la vie à 556 enfans dans l'é-

l'eſpace de cinq ans. J'ai le plaiſir de pouvoir joindre ici un apperçu de l'état de l'Inoculation telle qu'elle ſe pratique dans l'inſtitut Impérial établi à St. Pétersbourg l'an 1768 par la bienfaiſance & l'humanité de notre tres-gracieuſe Souveraine; je le dois à la complaiſance du Directeur actuel de la maiſon, Mr. le Conſeiller de College Holledy, & de Mr. l'Aſſeſſeur Mineman qui y eſt attaché depuis long-tems, & qui ont bien voulu me communiquer un extrait des regiſtres depuis 1780.

*Nombres des enfans qui ont été inoculés dans la maiſon Impériale d'inoculation à St. Pétersbourg depuis 1780 jusqu'en 1790.*

| l'an. | Mâles | Fémelles | Sommes | Morts. |
|---|---|---|---|---|
| 1780 | 62 | 41 | 103 | |
| 1781 | 71 | 90 | 161 | |
| 1782 | 57 | 51 | 108 | |
| 1783 | 102 | 83 | 185 | |
| 1784 | 59 | 53 | 112 | 1 |
| 1785 | 109 | 64 | 173 | 1 |
| 1786 | 64 | 75 | 139 | |
| 1787 | 86 | 63 | 149 | 1 |
| 1788 | 60 | 75 | 135 | |
| 1789 | 132 | 58 | 190 | |
| 1790 | 58 | 57 | 115 | 1 |
| Total | 860 | 710 | 1570 | 4 |

Je tire de cette table les concluſions ſuivantes:

a) Il n'eſt mort des enfans inoculés qu'en raiſon de 25 de 10000; c'eſt moins encore qu'en raiſon de 3 par 1000. Or on peut bien ſuppoſer, que, l'un compen-

 ſant

ſant l'autre, il meurt des enfans attaqués de la petite verole naturelle en raiſon de 1428 à 10000; la mortalité de la petite verole naturelle eſt donc à celle de la petite verole inoculée comme 1428 à 25, ou bien comme 57 à 1.

b) Il y a annuellement 143 enfans inoculés dans l'établiſſement; calcul moyen de 11 ans. Or dans ce même intervalle de tems il y eut à St. Pétersbourg annuellement 6049 naiſſances. Il n'y eut donc que le 42$^{me}$ enfant de toutes les naiſſances qu'on ait fait jouir de cet établiſſement publique; quoique nos tables demontrent, que dans le même intervalle de tems la petite verole naturelle a enlevé 146 enfans par an, & que ce fut conſequemment le 41$^{me}$ enfant de toutes les naiſſances qui dut être la victime de cette maladie.

c) L'âge des inoculés a été pour le moins, & rarement, de 2 ans & demi; pour l'ordinaire entre 3 & 10 ans; il y eut cependant auſſi d'inoculés neuf perſonnes à l'âge de 16, deux à celui de 25, & une à l'âge de 46 ans.

3.) Il y eut dans la derniere période annuellement 23 perſonnes, 18 hommes & 5 femmes, qui ont peri par differens accidens.

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts a été de 21 perſonnes, 18 hommes & 3 femmes. Il a donc été dans cette période de la moitie moindre que dans la précedente.

5.) La

5.) La publicité à l'égard des nombres annuels des morts arrivées dans les maiſons des Enfans trouvés, dans les Hoſpitaux & les Priſons, intereſſe trop l'humanité pour ne pas la deſirer; auſſi l'Ordre Impérial en fait, je le repète, une expreſſe mention.

6.) La révolution pèriodique de la mortalité relativement aux ſaiſons & aux mois de l'année, a été dans la dernière période ſenſiblement la même que dans les périodes précédentes. Depuis le mois d'Octobre, au quel la mortalité a été la plus petite, elle s'eſt augmentée de mois en mois jusqu'à celui de Mai, où elle a été la plus forte; après quoi elle s'eſt diminuée peu à peu jusqu'à celui d'Octobre.

De 1000 morts dans la dernière période, il mourut

| | |
|---|---|
| 374 au Printems<br>250 en Été<br>181 en Automne<br>195 en Hiver. | Le nombre des morts au Printems & en Été ſurpaſſe celui des morts en Automne & en hiver en raiſon de 3 à 2. |

# DE MOTV SINGVLARI PROGRESSIVO ET ROTATORIO CORPORIS CYLINDRICI, FILO FLEXILI, EX CVIVS ALTERO TERMINO SVSPENDITVR, CIRCVMDATI.

Auctore
*NICOLAO FVSS.*

*Conuent. exhib. die 4 Apr. 1793.*

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Corpus, in cuius motum hic ſum inquiſiturus, conſtat ex duobus diſcis circularibus PQ et RS, inter ſe parallelis, eiusdem materiae, magnitudinis & figurae, parum a ſe inuicem diſtantibus, et cylindrulo *a b c d* ita iunctis, vt eorum axes cum axe cylindruli in eandem lineam rectam incidant. Cylindro filum flexile circumuoluitur, cuius alter terminus in ſuperficie cylindri figitur, ita vt, dum alter terminus ex O ſuspenſus tenetur, corpus proprio ſuo pondere, circa centrum gyrando, in eodem plano verticali deſcendere libere filumque ſeſe euoluere queat.

§. 2. Ex hac deſcriptione facile quisque intelligitur, ſermonem hic eſſe de crepundiis illis, a Gallis emigratis, vt fama fert, Aquisgrani primum inuentis, indeque breui temporis ſpatio per maximam Europae partem propagatis et anno proxime

xime praeterlapſo etiam inter luſus iuuentutis Petropolitanae per aliquod tempus receptis. Motus igitur huius corporis phaenomena et leges ex principiis mechanicis breviter determinabo.

§. 3. Quanquam autem inueſtigationem huius motus a caſu illo ſimpliciſſimo inchoabo, quem initio deſcripſi; tamen praecipuum huius disquiſitionis negotium verſabitur in ſolutione problematis multo difficilioris, quo corpus non ſoli ſuo ponderi relinquitur, ſed data quadam vi, datoque ſub angulo, retento altero fili termino, proiicitur, et, gyrando circa axem, in plano verticali, diſcis parallelo, per lineam curvam deſcendit. Pro hoc enim motu numerum reuolutionum corporis, longitudinem portionis fili euolutae, tenſionem fili, celeritatem progreſſiuam & gyratoriam, nec non curuae a puncto contactus deſcriptae coordinatas pro quauis elongatione a recta verticali, determinabo.

§. 4. Sit radius cylindri $CX = a$, radius diſci vtriusque $CB = b$, longitudo portionis fili cylindro circumuolutae $= f$, punctum contactus initio motus ſit in A. Maſſula ſeu pondus corporis vocetur M et momentum inertiae, reſpectu axis gyrationis, $Mkk$. Iam poſt tempus $t$ minutorum ſecundorum ab initio motus elapſum peruenerit corpus in X, ita vt portio fili euoluta ſit $AX = x$, et poſito angulo $XCx = \Phi$, erit arcus $Xx$, cui portio fili XA applicata fuerat, $= a\Phi = x$, ita vt ſit $\partial x = a\partial\Phi$ et $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial x}{a}$. His notatis principia mechanica praebent has duas aequationes: Tab. V. Fig. 2.

$$\text{I. } \frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = M - T,$$

$$\text{II. } \frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = bT,$$

denotante T tenſionem fili et $g$ altitudinem, per quam corpus quodlibet primo minuto ſecundo libere delabitur.

§. 5. Ex harum aequationum ſecunda elicitur valor tenſionis

$$T = \frac{M k k \partial \partial \Phi}{2 g b \partial t^2} = \frac{M k k \partial \partial x}{2 g a b \partial t^2},$$

qui in prima ſubſtitutus dat:

$$\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = \frac{1}{1 + \frac{k k}{b b}} = \frac{1}{1 + n},$$

poſito breuitatis gratia $n = \frac{k k}{a b}$. Hinc integrando deducitur:

Celeritas progreſſiua $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{2 g t}{1 + n}$;

Celeritas gyratoria $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2 g t}{a (1 + n)}$;

hincque denuo integrando prodit:

Spatium percurſum $x = \frac{g t t}{1 + n}$;

Angulus gyrationis $\Phi = \frac{g t t}{a (1 + n)}$.

Hic enim, in neutra integratione, conſtantis adiectione opus eſt, quoniam initio motus, vbi $t = 0$, tam celeritas quam ſpatium ſponte euaneſcunt, vti natura rei poſtulat.

§. 6. Ex hactenus allatis intelligitur, in puncto X fore tempus deſcenſus $t = \sqrt{\frac{(1 + n) x}{g}}$, celeritatem vero progreſſiuam $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{\frac{g x}{1 + n}}$, vnde pro puncto infimo, ad quod corpus gyrando deſcendere poteſt, erit tempus deſcenſus $t = \sqrt{\frac{f (1 + n)}{g}}$ et celeritas in hoc puncto acquiſita $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \sqrt{\frac{f g}{1 + n}}$. Quod tenſionem fili attinet, ea vbique erit eadem, ſcilicet

$$T = \frac{M k k}{a b (1 + n)}.$$

§. 7. Cum igitur corpus in puncto infimo celeritatem acquiſiuerit gyratoriam ſeu angularem $= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{g x}{1 + n}}$; id hac celeritate motum ſuum gyratorium proſequetur, quod, quoniam totum iam filum eſt euolutum, in contrarium ſenſum, gravitatis

vitatis directioni oppoſitum, fiat neceſſe eſt. Corpus igitur in eundem ſenſum quidem gyrare perget, filum autem ex altera parte iterum cylindro ſeſe circumplicabit et corpus aſcendet ſecundum ſequentes leges motus.

§. 8. Ex puncto infimo F corpus rurſus aſcendere incipiet celeritate acquiſita $= 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$. Poſt tempus $t$ ab aſcenſus initio elapſum peruenerit corpus in X, exiſtente nunc ſpatio $FX = x$ et angulo $XCx = \Phi$, eritque arcus $XGx = a\Phi = x$, et principium accelerationis dat: Tab. V. Fig. 3.

$$\text{I.}\quad \frac{M\partial\partial x}{2g\partial t^2} = T - M,$$

$$\text{II.}\quad \frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = -bT.$$

Hinc, ob $\partial\partial\Phi = \frac{\partial\partial x}{a}$, prodit aequatio:

$$\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \frac{-1}{1+n},$$

vnde deducitur celeritas progreſſiua:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C - \frac{2gt}{1+n},$$

quae cum in puncto F, vbi $t = 0$, debeat eſſe $2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, inde concluditur $C = 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, ita vt, ſubſtituto hoc valore, ſit celeritas

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{fg}{1+n}} - \frac{2gt}{1+n},$$

et ſpatium percurſum

$$x = 2t\sqrt{\frac{fg}{1+n}} - \frac{gtt}{1+n},$$

vbi conſtantis additione non eſt opus, quoniam poſito $t = 0$, pro aſcenſus initio fit $x = 0$, vti requiritur.

§. 9. Quaeramus tempus $t$, quo corpus ab F vsque ad X peruenit, eritque

$$t = \sqrt{\frac{f(1+n)}{g}} - \sqrt{\frac{(f-x)(1+n)}{g}}.$$



Hoc

Hoc porro valore loco $t$ introducto erit celeritas in puncto X

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g(f-x)}{1+n}},$$

quae igitur caſu $x = 0$ eſt $2\sqrt{\frac{fg}{1+n}}$, vti requiritur, poſito vero $x = f$ euaneſcit. Corpus igitur eodem temporis ſpatio, quo deſcenſum abſoluerat, in priſtinum ſtatum reuertitur, & in quolibet puncto aſcendendo eandem habet velocitatem, quam deſcendendo in eodem puncto habuit, eodemque temporis interuallo, a momento aſcenſus aequaliter remoto, tam aſcendendo quam deſcendendo in eodem puncto rectae verticalis deprehenditur.

§. 10. Quo rem exemplo illuſtremus, ſumamus $a = 2$ lin. $b = 21$ lin. $f = 4$ eiusmodi pedum, quorum 16 faciunt altitudinem, ex qua grave primo minuto ſecundo delabitur, ita vt $g = 16$ ped. Hinc ob $kk = \frac{1}{2}bb$ et $n = \frac{kk}{ab} = \frac{21}{4}$, crit $n + 1 = \frac{25}{4}$. Motum huius corporis ſequens tabula exhibet.

| Temp. | Celer. | Diſt. A X | Num. rev. |
|---|---|---|---|
| 0, 25 | 1, 28 | 0, 16 | 1, 83 |
| 0, 50 | 2, 56 | 0, 64 | 7, 33 |
| 0, 75 | 3, 84 | 1, 44 | 16, 39 |
| 1, 00 | 5, 12 | 2, 56 | 29, 33 |
| 1, 25 | 6, 40 | 4, 00 | 45, 84 |
| 1, 50 | 5, 12 | 2, 56 | 62, 34 |
| 1, 75 | 3, 84 | 1, 44 | 75, 17 |
| 2, 00 | 2, 56 | 0, 64 | 84, 34 |
| 2, 25 | 1, 28 | 0, 16 | 89, 84 |
| 2, 50 | 0, 00 | 0, 00 | 91, 68 |

§. 11. Circa hanc tabulam ſequentia ſunt notanda: Prima columna exhibet tempus ab initio motus elapſum in minu-

minutis ſecundis expreſſum. Secunda columna oſtendit celeritatem progreſſiuam diſci, expreſſam per ſpatium, quod corpus eadem celeritate vno minuto ſecundo percurreret, in pedibus quorum 16 faciunt altitudinem, ex qua grave primo minuto ſecundo delabitur. Tertia columna continet diſtantiam corporis a loco eius initiali, in iisdem pedibus expreſſam. Quarta denique columna oſtendit quot reuolutiones corpus interea perfecerit. Abſoluta hac prima periodo corpus motum ſuum ſecundum easdem leges proſequetur, hicque motus perpetuo durabit, niſi frictio, aliaque impedimenta phyſica eum ita moderent, vt tandem penitus extinguatur.

§. 12. Proiiciatur nunc corpus ſecundum directionem AD, ad lineam verticalem AB, per initium motus A tranſeuntem, inclinatam ſub angulo $BAD = \alpha$. Ponamus initio punctum cylindruli $x$ fuiſſe in A, elapſo autem tempore $t$ min. ſec. ſeſe euoluiſſe portionem fili $AX = a\Phi$, exiſtente angulo gibbo $XCx = \Phi$, ſiue arcu $XRx = a\Phi$. Sit vis initialis qua corpus proiicitur $= V$, angulus vero $BAX = \zeta$, vocenturque coordinatae $AP = x$, $PX = y$, et ſeruatis reliquis denominationibus ſupra adhibitis, ſi vires ſecundum directiones coordinatarum reſoluamus, principia motus ſuppeditant ſequentes tres aequationes fundamentales: Tab. V. Fig. 4.

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = \frac{V\,\mathrm{coſ.}\,\alpha + M - T\,\mathrm{coſ.}\,\zeta}{M};$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = \frac{V\,\mathrm{ſin.}\,\alpha - T\,\mathrm{ſin.}\,\zeta}{M};$$

$$\text{III. } \frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{bT}{Mkk};$$

quibus tota problematis ſolutio comprehenditur.

§. 13. Sumantur nunc differentialia tam prima quam ſecunda coordinatarum:

 $x =$

$$x = a\Phi \operatorname{coſ.} \zeta,$$
$$y = a\Phi \operatorname{ſin.} \zeta,$$

eritque

$$\partial x = a\partial\Phi \operatorname{coſ.}\zeta - a\Phi\partial\zeta \operatorname{ſin.}\zeta,$$
$$\partial y = a\partial\Phi \operatorname{ſin.}\zeta + a\Phi\partial\zeta \operatorname{coſ.}\zeta,$$
$$\partial\partial x = a\partial\partial\Phi \operatorname{coſ.}\zeta - 2a\partial\Phi\partial\zeta \operatorname{ſin.}\zeta - a\Phi\partial\zeta^2 \operatorname{coſ.}\zeta - a\Phi\partial\partial\zeta \operatorname{ſin.}\zeta,$$
$$\partial\partial y = a\partial\partial\Phi \operatorname{ſin.}\zeta + 2a\partial\Phi\partial\zeta \operatorname{coſ.}\zeta - a\Phi\partial\zeta^2 \operatorname{ſin.}\zeta + a\Phi\partial\partial\zeta \operatorname{coſ.}\zeta.$$

Fiat nunc haec combinatio: II. coſ. $\zeta$ — I. ſin. $\zeta$; tum vero I. coſ. $\zeta$ + II. ſin. $\zeta$, vnde emergent ſequentes duae aequationes:

$$\text{IV.}\ \frac{\partial\partial y \operatorname{coſ.}\zeta - \partial\partial x \operatorname{ſin.}\zeta}{2g\partial t^2} = \frac{V \operatorname{ſin.}(\alpha - \zeta) - M \operatorname{ſin.}\zeta}{M},$$
$$\text{V.}\ \frac{\partial\partial x \operatorname{coſ.}\zeta + \partial\partial y \operatorname{ſin.}\zeta}{2g\partial t^2} = \frac{V \operatorname{coſ.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{coſ.}\zeta - T}{M}.$$

Cum autem ſit:

$$\partial\partial y \operatorname{coſ.}\zeta - \partial\partial x \operatorname{ſin.}\zeta = 2a\partial\Phi\partial\zeta + a\Phi\partial\partial\zeta,$$
$$\partial\partial x \operatorname{coſ.}\zeta + \partial\partial y \operatorname{ſin.}\zeta = a\partial\partial\Phi - a\Phi\partial\zeta^2,$$

poſtremae binae aequationes, his valoribus ſubſtitutis, ſequentem induent formam:

$$\text{IV.}\ \frac{2a\partial\Phi\partial\zeta + a\Phi\partial\partial\zeta}{2g\partial t^2} = \frac{V \operatorname{ſin.}(\alpha - \zeta) - M \operatorname{ſin.}\zeta}{M},$$
$$\text{V.}\ \frac{a\partial\partial\Phi - a\Phi\partial\zeta^2}{2g\partial t^2} = \frac{V \operatorname{coſ.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{coſ.}\zeta - T}{M}.$$

Ex III. autem colligitur $\frac{T}{M} = \frac{kk\partial\partial\Phi}{2gb\partial t^2}$, quo valore in V ſubſtituto, ſi breuitatis gratia ponatur $a + \frac{kk}{b} = h$, iſta poſtrema aequatio ita ſe habebit:

$$\text{V.}\ \frac{h\partial\partial\Phi - a\Phi\partial\zeta^2}{2g\partial t^2} = \frac{V \operatorname{coſ.}(\alpha - \zeta) + M \operatorname{coſ.}\zeta}{M}.$$

§. 14.

§. 14. Totum iam negotium eo redit, vt ex binis poſtremis aequationibus relatio inter angulos $\zeta$ et $\Phi$ eruatur. Hunc in finem notetur, quartam veram eſſe, quicunque valor angulo $\zeta$ tribuatur. Scribatur ergo $\zeta - 90°$ loco $\zeta$, eaque abibit in hanc:

$$\text{IV. } \frac{2a\partial\Phi\partial\zeta + a\Phi\partial\partial\zeta}{2g\partial t^2} = \frac{V\, cof.(\alpha - \zeta) + M\, cof.\,\zeta}{M},$$

qua cum V comparata ſequens emergit aequatio differentialis ſecundi gradus binas variabiles $\Phi$ et $\zeta$ complectens:

$$b\partial\partial\Phi - 2a\partial\Phi\partial\zeta - a\Phi\partial\zeta^2 - a\Phi\partial\partial\zeta = 0,$$

quae aequatio ſi per $b$ diuidatur, elementum vero $\partial\zeta$ vt conſtans ſpectetur, ita ſe habebit:

$$\partial\partial\Phi - \tfrac{2a}{b}\partial\Phi\partial\zeta - \tfrac{b}{a}\Phi\partial\zeta^2 = 0,$$

cuius integrale completum eſt

$$\Phi = A\,e^{\lambda\zeta} + B\,e^{\mu\zeta},$$

exiſtente $\lambda = \frac{a}{b} + m$, $\mu = \frac{a}{b} - m$ et $m = \sqrt{(\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b})}$.

§. 15. Ad determinandas binas conſtantes arbitrarias A et B, per duplicem integrationem ingreſſas, conſideretur primo ſtatus initialis, vbi $\zeta = \alpha$ et $\Phi = 0$, eritque ex hoc caſu $B = -A\,e^{2m\alpha}$, hincque

$$\Phi = A\,(e^{\lambda\zeta} - e^{2m\alpha + \mu\zeta}).$$

In fine autem motus, vbi totum filum, cuius longitudinem ponamus $= l$, iam eſt euolutum, debet eſſe $\Phi = \frac{l}{a}$. Sit pro hoc loco angulus $\zeta = \beta$, eritque

$$\frac{l}{a} = A\,(e^{\lambda\beta} - e^{2m\alpha + \mu\beta}),$$

ideo-

ideoque

$$A = \frac{l}{a\,(e^{\lambda\beta} - e^{2m\alpha+\mu\beta})},$$

quem valorem notaſſe ſufficiet, quandoquidem eius loco litteram A in calculo retinebimus.

§. 16. Inuenta relatione inter angulos $\zeta$ et $\Phi$, omnia per ſolam elongationem fili a linea verticali exprimere licebit. Cum enim ſit

$$\partial\Phi = A\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})\,\partial\zeta,$$

$$\partial\partial\Phi = A\,(\lambda^2\,e^{\lambda\zeta} - \mu^2\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})\,\partial\zeta^2,$$

tum vero ex quinta aequatione:

$$\partial t^2 = \frac{M\,b}{2\,g}\cdot\frac{\partial\partial\Phi - \frac{a}{b}\,\Phi\,\partial\zeta^2}{V\,\text{coſ.}\,(\alpha-\zeta) + M\,\text{coſ.}\,\zeta},$$

ſubſtitutis valoribus pro $\Phi$ et $\partial\partial\Phi$ erit

$$\partial t^2 = \frac{M\,A\,a\,\partial\zeta^2\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}{g\,[V\,\text{coſ.}\,(\alpha-\zeta) + M\,\text{coſ.}\,\zeta]},$$

ideoque tempus

$$t = \frac{M\,A\,a}{g}\int\partial\zeta\,\sqrt{\frac{\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta}}{V\,\text{coſ.}\,(\alpha-\zeta) + M\,\text{coſ.}\,\zeta}},$$

quod autem, ob defectum Analyſeos, finite exprimere non licet.

§. 17. Quod reliqua momenta attinet, ea ſequenti modo per ſolam variabilem $\zeta$ exprimentur:

Coor-

Coordinatae curuae:

$$x = a\,A\,(e^{\lambda\zeta} - e^{2m\alpha+\mu\zeta})\,\text{coſ.}\,\zeta;$$
$$y = a\,A\,(e^{\lambda\zeta} - e^{2m\alpha+\mu\zeta})\,\text{ſin.}\,\zeta;$$

Celeritates progreſſiuae:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{g a A[V\text{coſ.}(\alpha-\zeta)+M\text{coſ.}\zeta][(\lambda\text{coſ.}\zeta-\text{ſin.}\zeta)e^{\lambda\zeta}-(\mu\,\text{coſ.}\zeta-\text{ſin.}\zeta)e^{2m\alpha+\mu\zeta}]}{M\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\frac{g a A[V\text{coſ.}(\alpha-\zeta)+M\text{coſ.}\zeta][(\lambda\text{ſin.}\zeta+\text{coſ.}\zeta)e^{\lambda\zeta}-(\mu\,\text{ſin.}\zeta+\text{coſ}\,\zeta)e^{2m\alpha+\mu\zeta}]}{M\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}}$$

Celeritas gyratoria:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{g\,A\,[V\,\text{coſ.}(\alpha-\zeta)+M\,\text{coſ.}\zeta]\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta}-\mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}{M\,a}}.$$

Tenſio fili:

$$T = \frac{k\,k\,[V\,\text{coſ.}(\alpha-\zeta)+M\,\text{coſ.}\zeta]\,(\lambda^2 e^{\lambda\zeta} - \mu^2 e^{2m\alpha+\mu\zeta})}{2\,a\,b\,(\lambda\,e^{\lambda\zeta} - \mu\,e^{2m\alpha+\mu\zeta})}.$$

§. 18. Facile intelligitur hanc ſolutionem generalem ad caſum praecedentem, §. §. 4 —— 7. tractatum, vbi corpus ſoli ſuo ponderi relinquebatur, neutiquam applicari poſſe, quoniam ſola variabilis $\zeta$, qua hic omnia momenta exprimuntur, pro illo caſu euaneſcit. Solutio igitur caſus ſpecialis memorati repetenda foret a ternis aequationibus fundamentalibus §. 12. exhibitis, quae poſito $\zeta = 0$, $\alpha = 0$, $V = 0$, abeunt in eas ipſas, quas §. 4. protulimus. Interim tamen hoc incommodum ceſſat reſpectu tenſionis T, quae cum ſupra §. 6. inuenta ſit $T = \frac{M\,k\,k}{a\,b\,(1+n)}$, ideoque conſtans, eundem valorem ſortiri debet, ſi in expreſſione generali §. 17.

 tradi-

tradita ponatur $\alpha = 0$, $\zeta = 0$, $V = 0$, quo facto fit:

$$T = \frac{k\,k\,M\,(\lambda^2 - \mu^2)}{2\,a\,b\,(\lambda - \mu)} = \frac{M\,k\,k\,(\lambda + \mu)}{2\,a\,b}.$$

Eſt vero

$$\lambda + \mu = \frac{2\,a}{b} = \frac{2\,a\,b}{a\,b + k\,k} = \frac{2}{1 + n},$$

ideoque

$$T = \frac{M\,k\,k}{a\,b\,(1 + n)},$$

vt ſupra, qui conſenſus veritatem noſtrae ſolutionis generalis egregie confirmat.

PHY-

# PHYSICA.

# OBSERVATIONVM
## DE
# TELA DICTA CELLVLOSA
## CONTINVATIO SECVNDA:
# CELLVLOSA MVSCVLORVM.

Auctore
*C. F. WOLFF.*

*Conuent. exhib. die* 17 *Mart.* 1791.

Si ſectio fiat cutis, digitum vnum aut duos transuerſos lata, ſubſtantiae deinde ſubcutaneae et adipis, porro celluloſae, quae adipem et muſculos intercedit, et muſculorum tandem ipſorum ad oſſa vsque, *a*) ſicuti commode quidem ex brachio id fieri poteſt, quam partem et imprimis tum in prioribus, tum in his, quae ſequuntur, experimentis adhibui; cutis cum ſubſtantia ſubcutanea *b*) et adipe *c*), quas hactenus deſcripſi, ſatis firmiter inter ſe cohaerent; hae partes vero ſimul ſumtae cum muſculis *d*), ope celluloſae nonniſi ea ratione connexae ſunt, vt horſum iſtorſum, quocunque lubuerit,



*a*) Tab. V. fig. 1.
*b*) Tab. cit. fig. 1. a. b. c. c.
*c*) Tab. cit. fig. 1. d. e.
*d*) Tab. cit. fig. 1. f. f. f.

rit, illae ſuper muſculos illaeſa celluloſa, illaeſoque nexu promoueri queant. Et recta abſtrahi quoque a muſculis ad digitorum duorum transuerſorum diſtantiam vsque, et vltro, partes eaedem poſſunt, celluloſa nexuque pariter illaeſis. Verum dum hoc fit, lata lamina *a*), quantum cutis cum adipe abſtracta a muſculis diſtat, admodum tenuis, perpendiculari poſitione ab adipe ad muſculos tranſit, ex celluloſa, qua adeps cum muſculis coniungitur, formata. Haec, vt omnis celluloſa, ſi microſcopio perluſtratur, continua et aequalis ſubſtantia apparet. Neque lineolas illas, aut quidquam diſtincti, in ea inueni, neque vmbra pororum, nedum cellarum, aut laminarum, apparuit.

Nimirum celluloſa ſubſtantia, qua adeps cum muſculis ſubiectis conglutinatur, quaeque eadem ſimul muſculos inueſtit, ſtratum ſibi remiſſa alicuius craſſitiei, quam lineam tamen non puto ſuperare, efficit. Haec ſubſtantia ſemifluida et ductilis a lateribus ad mediam partem inter adipem et muſculos, dum illa cum cute ab his abducitur, ſe retrahit, in eaque tenuem illam, quam dixi, laminam *b*), dum extenditur, producit, eo quidem latiorem, quo magis extenditur. Non omnis tamen omnino ſubſtantia celluloſa a muſculis vtrinque, dum verſus mediam partem ſe retrahit, abducitur; quin aliqua eius portio tantum ad laminam efficiendam concurrit, reliqua illita muſculis manet, quam vt fibrae muſculi diſtinctius appareant, cultro ſeorſim a muſculis ſoluere et auferre oportet.

Haud rarum eſt videre ſimiles laminas latas inter muſculos aliasque partes, copioſiori celluloſa coniunctas. Si duo muſcu-

---

*a*) Tab. cit. fig. 1. h.

*b*) Fig. 1. h.

muſculi, ſibi mutuo incumbentes, communi celluloſa obducti, eademque ſimul inter ſe conglutinati, non ſolito modo, veluti ad praeparationem anatomicam opus eſt, ablata cultro celluloſa ſeparantur, ſed digitis ſimpliciter prehenſi a ſe inuicem diducuntur; in ſimilem laminam latam ea celluloſae portio, qua muſculi cohaerebant, extenditur. Maxime in regione lumbari abdominis, tum et in iliaca inter peritoneum et partes, retro hoc ſitas, renes, pſoas muſculos iliacosque internos laminae eiusmodi celluloſae apparent, dum peritoneum a dictis partibus ſubiectis abducitur. Si partes a ſe mutuo diducendae vna cum conglutinante celluloſa aliis partibus et profundiori celluloſae incumbunt, vt aer vtrinque liber ad laminam accedere non poſſit; hic tamen alicubi inter celluloſam ſubiectam et laminam irrumpere eamque eleuare et magnas ſub eadem bullas aereas producere ſolet. Neque etiam aliter hoc fieri poteſt; ſiquidem ipſo pondere ſuo aer ex ternus laminam productam, niſi alios aditus inueniat perforabit, inque ſpatia, diductione partium ſub lamina ſuborta, irrumpet, bullasque producet. Caeterum ad trium quatuorue digitorum transuerſorum latitudinem eiusmodi laminae ſaepius extendi poſſunt, priusquam rumpantur.

Mirum eſt, qui credi potuit, has latas magnasque laminas, vti inter partes diſtractas apparent, natura formatas, antequam partes illae a ſe mutuo diſtraherentur, cumque contiguae ſibi accumberent, iam exſtitiſſe; cum locus deſit, vbi exiſtant. Spatiaque illa magna et bullas aereas exſtitiſſe, cum partes, quas oporteret continere ſpatia et bullas contiguae ſibi mutuo accumbant, cumque ſtrepitus irrumpentis aeris, dum peritoneum v. c. a partibus, quas tegit, abducitur, dumque ſpatia ergo ac bullae noſtra arte procreantur, audiri poſſit. Nam contiguum omnino peritoneum in regionibus illis partibus

bus retroſitis accumbit, neque niſi tenue ſtratum ſubſtantiae, celluloſae dictae, ſemifluidae tenacis et continuae, qua partibus peritoneum adglutinatur, peritoneo et partibus intereſt. Vbi muſculi vero a ſe inuicem diſtracti laminam fingunt, tenuis, vix lineam dimidiam lata ſtria inter eos, antequam diducuntur, apparet, quae ſectionem ſcilicet, et craſſitiem eius ſtrati ſubſtantiae denotat, qua muſculi conglutinantur, continuae et vniformis, quae ergo verſus partem mediam, muſculis diductis, retracta in latam illam laminam extenditur.

Si operae pretium eſt, notare particulas illas diuerſas, quae paſſim reperiuntur in celluloſa, dum variis modis tractatur, quae minime quidem elementa ſunt eius, quemadmodum creditum eſt, neque vllo modo illaeſa partium ſtructura et ordine in ea exiſtunt, at aliquam tamen cauſam ſui in natura celluloſae habere videntur; ſequentes ſunt, quas hactenus obſeruauimus: Longe frequentiſſima fila occurrunt, quae omnem fere ſolitam praeparationem anatomicam partium corporis comitantur. Siue muſculos enim ſiue neruos ſectione detexeris, ſiue arterias, aut venas, aut membranas; vel euoluendae ex celluloſa hae partes vel ſeparandae ab aliis erunt, quibuscum celluloſa ſubſtantia conglutinantur. Vtrumque hoc, ſiquidem illaeſas partes volueris, nonniſi ita fieri poteſt, vt vel partes prius a ſe mutuo, vel celluloſa a parte eruenda, diſtrahantur, tum cultro celluloſa ſoluatur. In fila ergo antequam diſſecatur, omnis celluloſa extenditur. Haec opera ergo anatomici efficiuntur; pendentque ſimul a natura celluloſae, quae ſemifluida et tenaciuſcula ſubſtantia ni eſſet, in fila extendi non poſſet. Alia ſpecies artefactae celluloſae ſtructurae veſiculae ſunt, vel bullae potius aereae, quae vel flatu, vel aere ſponte irrumpente, in celluloſa producuntur. Hae minus frequenter quidem quam fila, attamen haud raro quoque

que apparent. Vbi profundior celluloſa inter partes diſtrahendas haeret, dumque in longiora fila aut laminas latiores celluloſa extenditur, veluti dum muſculi duo ſecundum longitudinem a ſe inuicem diſcerpuntur; fieri vix poteſt, quin et ea celluloſae portio, quae filis laminisue productis proxime ſubiecta eſt, quaeque ipſis his filis et laminis adhucdum tegitur, iam aliquantum extendatur, partesque, quas connectit, a ſe mutuo diducantur; proinde ſpatia inter partes diductas efficiantur, laminis filisque ſublimioribus tecta, in quae ergo aer externus, premens pondere ſuo, laminasque ſublimiores perforans, penetret; bullasque in profundiori illa celluloſa producat. Haec veſicularis celluloſae ſtructura pariter aut caſu, aut data opera ab anatomico, efficitur. Ea tamen ſingularis et propria celluloſae natura eſt, vt, vel ſponte irrumpente in eam aere, vel impulſo, in bullas efflari poſſit. Nam niſi ſemifluida celluloſa ſimulque tenaciuscula eſſet; neque impelli in eam aer poſſet, neque celluloſa cedendo aeris expanſioni, eumque continendo tamen in tenues pelliculas ab aere impulſo ſe extendi pateretur. Morbis etiam veſicularis celluloſae ſtructura effici poteſt. Et ipſa naturalis adipis fabrica eandem imitatur; cum veſiculae eius ſimili prorſus modo impulſo in celluloſam fluido oleoſo, ac bullae aere in eandem impulſo producantur. Tertiam denique ſpeciem magnae lataeque illae laminae exhibent, quae vel ſimplices ſunt, vel bullas maiores etiam continent, quemadmodum in praecedentibus explicui. Veram celluloſam ſtructuram, quemadmodum ſcilicet nobis eam imaginamur, quae cellulis minoribus lamellis varie compoſitis incluſis, conſtaret, non memini, ſiue arte ſiue natura productas, me unquam vidiſſe. Tres ergo ſpecies tantum ſtructurae artificialis celluloſae eſſe videntur, in quas haec ſubſtantia ſcilicet, dum varie tractatur, ſua natura effingi ſolet:

*ſilata*, *veſicularis*, et quae laminis maioribus conſtat, quam in ipſis his paginis expoſui.

Strata diuerſarum ſubſtantiarum, quae integumenta communia efficerent, quatuor in praecedenti de tela cellulosa diſſertatione numerata ſunt praeter epidermidem et celluloſam, quae muſculos tegit: cutis ipſa nimirum, ſubſtantia ſubcutanea, adeps merus et tunica adipoſa *a*). Haec poſterior ergo, quam in diſſertatione praecedente non ſatis explicui, ſi microſcopio perluſtratur, *b*) larga conſtat celluloſa, ſiue glutinoſa ſubſtantia *c*), quam vix vllam in mero adipe inuenias, niſi pelliculas, quibus veſiculae conſtant, ipſas putes, quae adeo arcte compreſſae per totum adipis ſtratum exiſtunt, vt nullum interſtitium inter eas diſtingui poſſit. Striatim contra adipis veſiculae *d*) per celluloſam tunicae adipoſae diſtributae ſunt, vt larga ſatis interſtitia inter tractus adipis inueniantur, quae clara maximamque partem pura celluloſa conſtant; cum tractus illi adipis contra veſiculis immediate, non glebis, aut veſicularum aggeribus, velut merus adeps, compoſitae ſint. Glutinoſa ſubſtantia eiusdem fere indolis eſt, cuius ea eſt, quae muſculos eorumque fibras connectit, quam in ſuperioribus deſcripſi. Clara ſcilicet pellucida et ſemifluida ſubſtantia eſt, quae in fila *e*) facile extendi poſſit. Sedes tamen variae dantur in tunica adipoſa, a tractibus adipis pariter et a pura celluloſa diuerſae. In iis ſcilicet globuli diſperſi *f*) apparent ſoli-

*a*) Tab. cit. fig. 1. e.
*b*) Tab. cit. fig. 2.
*c*) Tab. cit. fig. 2. b. b. b.
*d*) Tab. cit. fig. 2. a. a.
*e*) Tab. cit. fig. 2. c. c.
*f*) Tab. cit. fig. 2. d. d.

ſolitarii, veſiculis adipis minores et albi. Non dubito, quin verae veſiculae ſint hi globuli, quamuis propria experimenta cum iis inſtituere ob paruitatem eorum non licuit. Analogia adipis, ſubſtantiaeque ſubcutaneae, ipſa ſedes tandem inter tractus adipis, rem demonſtrare fere videntur.

Tunica tandem adipoſa in muſculorum celluloſam ipſam ea ratione abit, vt ſenſim imminuta copia adipis pura denique glutinoſa ſubſtantia euadat, eo quidem purior clariorque, quo profundius in fabricam muſculorum penetrat. Haec muſculos ſingulos tegit, inter ſingulos continuata a tunica adipoſa deſcendit, totosque tanquam propriis vaginis ſuis obducit et inuoluit, eaque ratione alterum quemuis muſculum ab altero ſibi vicino diſtinguit. Ab his vaginis muſculorum earumque interna, qua muſculum ſpectant, ſuperficie inter ſingulos maiores, ſi quos muſculus habet, faſciculos eius lamina in muſculum ipſum deſcendit, faſciculumque quemuis ab altero quouis ſibi vicino diſtinguit, et continuata totum, quaelibet ſuum, faſciculum circumdat, eaque ratione vaginam porro cuiuis faſciculo propriam efficit, ſimili prorſus modo, atque de communi totius muſculi vagina dictum eſt. Denique a qualibet faſciculi vagina lamina porro, tenerior tamen iis, quibus faſciculi diſtinguuntur, inter fibras ſingulas, quae coniunctae faſciculum efficiunt, deſcendit, fibramque a fibra diſtinguit, et quamlibet continuata fibram ambit, vaginamque cuilibet propriam, faſciculorum vaginis teneriorem, producit. Vt quaeuis fibra propria ſua, hae, quae faſciculum ſimul ſumtae efficiunt, communi porro, et quae muſculum denique faſciculatim compoſitae producunt, omnium porro communi vagina ſint indutae, ea ratione quidem, vt quaeuis cuiusuis vaginae pars, qua duae vicinae fibrae, aut qua faſciculi duo, aut duo muſculi, ſibi mutuo vicini, a ſe inuicem diſtinguuntur,

 paries

paries ſit communis, aut ſeptum commune, fibrarum earum, aut faſciculorum, muſculorumue, ſibi mutuo vicinorum. Si fibrae ergo omnes illaeſis vaginis extrahi ex iis poſſent; ſectio earum alueolos potius quam diſtinctas ſeparatasque vaginas repraeſentaret.

Has vaginas caeterum muſculorum fibrarumque, pariter ac tunicas celluloſas arteriarum, venarum, inteſtinorum, ventriculi, partiumque aliarum, partes eſſe organicas, ex celluloſa ſubſtantia formatas, facile patet. Atque inde porro intelligitur, alueolos illos, etiamſi exiguos fibrarum, haud magis tamen, quam faſciculorum alueoli, aut vaginae muſculorum, neque magis quam tunicae celluloſae vaſorum et inteſtinorum, cum creditis cellis celluloſae ſubſtantiae confundendos eſſe. Si ſubſtantia vaginarum ſua natura celluloſa exiſteret; laminas parietesque vaginarum ipſas cellarum plenas eſſe, et conſtare lamellis minoribus, oporteret. Verum vaginae et laminae omnino continuae integraeque et aequales ſunt, neque vmbra in iis aut pori alicuius, aut cellae, aut lamellae, ſiue armatis ſiue inermibus oculis apparet. Moneo haec, ne confuſio rerum diuerſarum nouum errorem inducat. Nam ad ipſum etiam antiquum telae celluloſae errorem haud parum vaginae illae fibrarum, laminaeque, fibras diſtinguentes, contuliſſe videntur.

Solita enim praeparationis muſculorum phaenomena, quae neminem quidem plane latere, minime tamen ſatis obſeruata et conſiderata, eſſe videntur, vna cum filis illis, arte productis, errorem animis induxiſſe puto. Si integumenta communia, cutis cum omni adipe et cum celluloſa omni, qua muſculis adeps annectitur, ea ratione ſecundum longitudinem fibrarum a muſculis ſoluuntur, vt eadem hac vna operatione conti-

continuo muſculi eorumque fibrae diſtincte, et depurati a cellulosa, appareant, quemadmodum et vulgo fieri ſolet; fila, dum integumenta trahuntur, continuo apparent, inter ſingulas muſculi fibras vel faſciculos a retractis integumentis deſcendentia, quibus integumenta muſculo annexa eſſe videntur. Si cultro haec fila diſſecas, continuo integumenta trahendo, vlterius haec a muſculo ſoluuntur, at fila quaſi eadem, vlterius modo promota, continuo adſunt. Si maiori, ſi minori ſectione apparentia fila incidis, magis vel minus a muſculis integumenta ſoluuntur, magisque vel minus, quae continuo apparent, fila promouentur; at eadem vbique fila continuo adſunt, neque ſpatium vnquam detegitur, quo praecedens aliquod a ſequente filo diſtingueretur.

Vides facile, haec minime, quae videntur, fila, ſeparata alia ab aliis, ſed laminas eſſe continuas, ſeu ſepta, ſecundum longitudinem fibras diſtinguentia, quorum ad quamvis factam inciſionem ſectiones tantum apparent, continuati parietes inter partes ſoluendas integumentorum muſculorumque adhucdum cohaerentes latent, quaeque, ſiue leuiorem ſiue profundiorem feceris inciſionem, vbique continuo tanquam fila praeſentia apparent. Vides laminas illas eſſe, quas ſuperius deſcripſi, quae ab integumentis, a celluloſa ſcilicet, qua adeps cum muſculis cohaeret, et quae vaginam ſingulis muſculis efficit, inter ſingulas muſculi fibras deſcendunt, fibrasque circumdant et proprias ſingulis vaginas producunt. Neque, dummodo praeparando ſic muſculum, fibris inſignioribus et faſciculis praeditum, veluti pectoralem maiorem, attentius retractam cum adipe celluloſam, muſculumque ipſum, et data opera conſideres, res ipſa latet. Non fila enim tunc, ſed veras vaginas, tractione integumentorum dilatatas, ampliores fibris,

 vide-

videbis, in quas continuatae fibrae deſcendunt. Nimirum absque microſcopii auxilio attentis haec oculis apparent.

Altera methodus muſculos praeparandi, qua ſcilicet ad latitudinem fibrarum integumenta, vel aliae partes, a muſculo ſucceſſiue ſoluuntur, quae et pro meliori et tutiori haberi ſolet, plane diuerſa a prioribus phoenomena, quae pariter neceſſario eam comitantur, oſtendit. In iis celluloſae ſubſtantiae in vaginas fibrarum faſciculorumque productio, ſi dubium adhucdum ſuperſit, omnino patebit. Si integumenta communia a muſculo, latioribus faſciculis aut fibris praedito, ſolito modo ſecundum latitudinem fibrarum ſoluuntur, vt quantum fieri poteſt ſcilicet proxime ad fibram ſeu faſciculum incifio fiat celluloſae, qua retracta integumenta muſculo annectuntur; (nam ſola hac ratione, vti notum eſt, omnis celluloſa aufertur et nitida fit muſculi praeparatio); non fila nunc, ſed lata lamina, ad quamuis inciſionem inter retracta integumenta et muſculum apparet, quae ab integumentis retro vltimum, quem detexeris, faſciculum profunde deſcendere, eumque et totam detectam praeparatamque partem muſculi, ab ea, quam integumenta adhucdum tegunt, diſtinguere et ſecundum longitudinem muſculi ſeparare videtur. Hanc ſi extremo mucrone ſcalpelli incideris, non quantum incidiſti, de muſculo, ſed totus continuo nouus faſciculus ſecundum omnem ſui latitudinem in conſpectum prodit. Quo addito parti detectae et praeparatae muſculi, noua rurſus lamina apparet, auctam partem praeparatam denuo a reliqua, quam integumenta tegunt, diſtinguens. Vt ſemper tenuior tantum lamina celluloſa ſit incidenda, quo latior ilico muſculi faſciculus, aut lamella tenuior, quo fibra latior in conſpectum prodeat. Vides ergo laminas eſſe, ſecundum longitudinem fibrarum ductas, quibus ſinguli faſciculi ſingulaeque fibrae a ſe mutuo diſtin-

tinguuntur, quae, ſi ad longitudinem fibrarum integumenta aliaeue partes a muſculo ſoluuntur, ſui ſectiones tantum oſtendunt, filaque mentiuntur.

Sic factum eſſe exiſtimo, vt praeparando muſculos fila proſectores viderint celluloſa, quibus muſculi connecterentur, quae, iuncta filis, arte productis, ad confirmandam telae celluloſae ideam non parum contribuerint. Haec quamuis non ſint arte producta, velut illa, quae extenſione ſubſtantiae celluloſae ſimplicis fiunt; tamen nec ita, quemadmodum facta ſectione apparent, in corpore illaeſo exiſtunt. Vaginae nimirum exiſtunt integrae, aut quas latera earum vtrinque ad fibram referunt laminae, quae et, dum ſecundum latitudinem fibrarum integumenta a muſculo ſoluuntur, tanquam laminae ſe repraeſentant; atque tum demum, quando praeparatione muſculi ſecundum longitudinem fibrarum, inciſionibus factis transuerſis, diſſecantur, ſui ſectiones oſtendunt, quae nec tum quidem vera fila ſunt, ſed eſſe tantum videntur. Non minus ergo imaginariae partes ſunt haec fila, quam fila extenſione producta.

Apparent phoenomena illa ſuperius deſcripta, quae praeparationem muſculorum, tam ad latitudinem quam longitudinem fibrarum factam, comitantur; ſiue integumenta communia, ſiue aliae partes, quae muſculum tegunt, ſiue muſculi quoque a muſculis, praeparando ſoluuntur; dummodo, vt fieri ſolet, vtque leges artis praecipiunt, omnis celluloſa, facta proxime ad muſculum praeparandum ſectione, a muſculo aufertur. Nam hac ratione vaginae fibrarum ipſae forcipe prehenſae et dilatatae inciduntur et aperiuntur, vt nuda fibra appareat, et ſectiones diuiſae ad longitudinem vaginae fila vtrinque ad fibram repraeſentant. Si vero duo muſculi *a*) copioſori

*a*) Tab. cit. fig. 3. a. b.

ſiori celluloſa coniuncti, ita ſecundum longitudinem fibrarum a ſe mutuo ſeparantur, vt celluloſa ad muſculum vtrumque remaneat, vaginae fibrarum, ſectione non tactae, integrae et occultae reſtant. Sic ſolitae praeparationis phoenomena minime apparent. Illa potius in conſpectum prodeunt, quae in ſuperioribus (Diſſ. I. §. 10. fig. 1. 2. Ibidemque §. 12. fig. 3. 4.) deſcripſi, quibus continuam celluloſa ſubſtantiam offert, quae diſtractione muſculorum extenditur, fila artefacta producit.

Verum in hoc experimento, dum ad longitudinem ſcilicet fibrarum muſculi diuelluntur, quamuis etiam vaginae illaeſae et tectae occultaeque ad muſculos remaneant; veſtigia tamen aliqua earum haud raro apparent. Inter ſingulas fibras enim, dum duo muſculi ſecundum longitudinem diuelluntur *a*), fila eminentiora in conſpectum veniunt *b*), interſtitiis, fibris reſpondentibus, planiore celluloſa repletis *c*). Nimirum ad longitudinem muſculis diuulſis non ſimplex ſubſtantia celluloſa, vniformis et continua, ſed tubi potius, ex celluloſa ſubſtantia formati, a ſe mutuo diſtrahuntur, quemadmodum in praecedentibus explicatum eſt. Quae ergo tubis his ipſis, ſeu fibris incluſis, reſpondet *d*) celluloſa, tenuior eſt; craſſior, profundiusque inter fibras deſcendens, quae harum interſtitia occupat *e*). Hinc alternatim craſſiores tenuioresque ſtriae celluloſae eminentiora fila *f*) alternatim et planiora eorum inter

*a*) Fig. 3. a. b.
*b*) Fig. 3. f. f. f. f.
*c*) Fig. 3. d. d.
*d*) Fig. 3. d. d. e. e.
*e*) Fig. 3. f. f. f.
*f*) Fig. cit. 3. f. f. f.

terſtitia *a*) producunt. Interſtitia fibris ſeu tubis aut vaginis earum ipſis, fila fibrarum interſtitiis reſpondent. Si contra ad latitudinem fibrarum muſculi duo a ſe mutuo diuelluntur, quemadmodum factum eſt in experimentis diſſertationis primae, vnum continuum ſeptum, ex celluloſa ſubſtantia factum, inter muſculos deſcendens, eiusque craſſities quidem, proinde ſola vniformis ſubſtantia, diſtrahitur. Haec primo aequalem ſuperficiem muſculis diſtractis offert (Diſſ. I. fig. 1. 2.), deinde tractione continuata in fila extenditur (Diſſ. I. fig. 3. 4.).

Ergo et haec fila, veſtigia vaginarum latentium, distinguenda a filis pariter, quae ſimplice celluloſae extenſione oriuntur, atque ab illis, quae ſolitam muſculorum praeparationem comitantur, quaeque diſſectae fibrarum vaginae oſtendunt, phaenomenis illis adnumeranda ſunt, quibus opinio celluloſae telae produci et foueri potuit. Atque ſi ad varias illas particulas reſpicis, quas glutinoſa, quam celluloſam dicimus, ſubſtantia, dum varie tractatur, effingere poteſt, quinque earum ſpecies ſunt, quas hactenus vidimus; fila nimirum extenſione producta; deinde haec, quae ſectiones vaginarum fibrarum muſcularium mentiuntur. Ambo frequentiſſima ſunt; illa ſingularum partium corporis euolutionem, haec omnem praeparationem muſculorum, comitantur. Tertium filorum genus veſtigia ſunt vaginarum latentium fibrarum muſcularium. Haec quidem fila omnium rariſſime apparuiſſe videntur, cum contra methodum ac leges ſecandi ſit, digitis prehenſos musculos a ſe mutuo diuellere. His tribus filorum generibus ſtructura frequentiſſima celluloſae ſubſtantiae, filata ſcilicet effingitur. Denique bullae aereae, veſicularem exhibentes celluloſae

*a*) Fig. 3 d. d. d.

luloſae ſtructuram et laminae latae quartum et quintum genus particularum artificialium celluloſae efficiunt.

Caeterum ſi microſcopio muſculi ſecundum longitudinem diuulſi conſiderantur, *a*) bullae aereae copioſae *b*) vti irrumpente aere externo producuntur, haud iniucundo ſpectaculo frequenter obſeruari ſolent. Maximam partem in interſtitiis inter fila, fibris reſpondentibus, apparent *c*). Saepe tamen etiam in ipſa fila *d*) aerem penetrare bullasque in iis producere vidi.

Veriſimile videtur, vti a muſculorum faſciculorumque eius, ſic pariter et a fibrarum vaginis, quas vltimas conſideravimus, lamellas intus abire, quae inter fibrillas ſingulas ſcilicet deſcendant easque ambiant, et vaginulas pro iis efficiant. Rem ipſam tamen microſcopio proſequi non potui. Fibram ſolitae latitudinis ex anconeo longo adhibui. Eius aliquam portionem *e*) ſub microſcopium, ſpeculo inſtructum, transtuli vt pellucidam fibram viderem. Continuo fibrillae, *f*) quibus fibra compoſita erat, admodum diſtinctae, ex rubro flaueſcentes, eiusdem vbique latitudinis, nonnihil paſſim criſpatae, in faciculum, fibram efficientem, collectae, apparuerunt. Diuiſi hanc fibram ſecundum longitudinem in duas fere aequales partes. *g*) Tenuis ilico pellucidiſſima et fere fluida ſubſtantia glutinoſa et continua, cum partes fibrae paulatim ſepararem, in

*a*) Fig. 3.
*b*) Fig. 3. e. e. e.
*c*) Fig. 3. d. d.
*d*) Fig. 3 f. f.
*e*) Fig 4. a.
*f*) Fig. 4. h. h. h. h.
*g*) Fig. 4. b. c.

in conſpectum inter eas venit, qua portiones cohaerebant *a*). Vbi magis eas a ſe mutuo remoui, in fila mire tenuia et paſſim retiformia ſubſtantia extracta eſt *b*). Videtur ergo, quantum quidem experiri licet, quaelibet fibrilla non laxa vagina obducta, ſed illita potius eſſe ſimplici ſubſtantia hac glutinoſa, tenerrima et fere fluida, eaque cum ſua vicina cohaerere. Quicquid tamen ſit, hoc certum eſt, celluloſam eo vsque inter omnes corporis partes intercedere, easque a ſe mutuo diſtinguere et conglutinare pariter, aut connectere, vt inter ſimpliciſſimas microſcopicas fibrillas muſculorum quoque tenerrima haec et fere fluida ſubſtantia glutinoſa ſe inſinuet, fibrillamque a fibrilla diſtinguat.

## Explicatio figurarum

### Tab. VI. fig. 1.

Portiones muſculorum, ex brachio exſciſſae, cum tunica, qua teguntur, adipoſa, adipe puro et cute, inermibus oculis viſae. Cutis cum adipe et tunica adipoſa a muſculis abſtracta. Quae muſculos et tunicam illam intercedit celluloſa in latam laminam tenuem extenſa, in qua neque cellae neque pori, nec microſcopio adhibito, apparuerunt.

*a. b. c.* Cutis portio, pollicem circiter lata, aliquantum contracta.

*a.* Eius ſuperficies externa.

*b.* Margines ſeu ſectiones contractae.

*d. d.* Adeps purus, glebis conſtans compreſſis.



*a*) Fig. 4 d.

*b*) Fig. 4. e. f. g.

*e.* Tunica adipoſa, quam vaſa ſanguinea, parallela cuti, percurrunt.

*f. f. f.* Muſculi, celluloſa, in quam lamina (*h*) continuat, obducti.

*g.* Eorum ſectio.

*h.* Lata lamina celluloſa, abductis cute, adipe, et tunica adipoſa a muſculis, quos tegebant, quibusque celluloſa ſubſtantia adhaerebant, ſuborta; dum ſubſtantia haec glutinoſa ſcilicet retractione integumentorum extendebatur. In hac microſcopio aequalis et continua ſuperficies apparuit. Simplex ergo lamina eſt, extenſione orta, aut ſubſtantia glutinoſa, in latam laminam extenſa.

*i. i. k. l. m.* Margo laminae, quo muſculis adhucdum adhaeret. Ex eo celluloſa ſubſtantia laminae ſuper musculos (*f. n. f.*) continuat, eosque tegit. Si magis ergo cutem cum adipe a muſculis remouebam, margo verſus finem muſculorum adſcendebat, vt pars marginis (*i*) v. gr. regionem (*n*) in muſculis occuparet. Aer externus continuo ſubrepſit laminamque veſicae inſtar eleuauit. Vbi integumenta remiſi, margo laminae ſe retraxit, glutinoſa ſubſtantia laminae muſculis adhaeſit.

Fig. 2.

Subſtantia tunicae adipoſae (fig. I. *e.*) microſcopio conſiderata.

*a. a.* Veſiculae adipis, ſimiles prorſus illis, quae adipem puram efficiunt, non tamen in glebas, ſed in longas potius ſtrias collectae.

*b. b. b.*

*b. b. b.* Clara continua pellucida ſubſtantia glutinoſa.

*c. c.* Fila, in quae facile illa extenditur.

*d. d.* Veſiculae adipoſis minores, diſperſae, albae.

Fig. 3.

Portiones duorum muſculorum, celluloſa coniunctorum, aliqua parte ſecundum longitudinem a ſe inuicem ſeparatae, microſcopio conſideratae, quo connectens fibras celluloſa appareat.

*a. b.* Muſculi a ſe inuicem ſeparati.

*c. c. c. c.* Fibrae muſculorum.

*d. d. d. d.* Interſtitium inter muſculos in hac parte diſtractos, celluloſa repletum.

*e. e.* Bullae aereae, quibus plena eſt celluloſa, quae interſtitium replet. Quamprimum enim muſculi diducuntur a ſe mutuo, vt celluloſa, qua cohaerent, extendatur, aer continuo externus cum ſtrepitu aliquo in eam irrumpit, bullasque efficit.

*f. f. f. f.* Laminae celluloſae inter fibras deſcendentes, easque diſtinguentes, ſeu latera vaginarum, quibus fibrae inuoluuntur, extenſa, quo fila eminentia efficiuntur.

Fig. 4.

Fibra muſcularis, in duas partes ſecundum longitudinem diuiſa, vt celluloſa, ſeu glutinoſa ſubſtantia, qua fibrillae conglutinantur, appareat. Microſcopio pellucida viſa.

*a.* Fibra naturali magnitudine.

*b. c.* Partes in quas ſub microſcopio diuiſa eſt. Fibrillae, quibus conſtat.

*d.* Aequalis et continua, fere fluida, glutinoſa ſubſtantia, qua portiones (*b. c.*) aeque ac ſingulae fibrillae inter ſe cohaerent, qua fibrillae obductae. Quamdiu aliquantum modo partes fibrae (*b. c.*) a ſe inuicem diſtractae erant, aequalis vbique, vt in hac parte et continua ſubſtantia apparuit. Vbi magis vero portiones diſtraxi, in fila extendi coepit.

*e. f.* Fila ſolita, in quae ſubſtantia extenſa.

*g.* In hac parte tenerrima mirae elegantiae fila microſcopica retiformia extenſione oriebantur, quae nullam artem ſatis imitari poſſe opinor.

# EXPÉRIENCES
## SUR
## LE PRODUIT EN FER DE FONTE D'UN HAUT-FOURNEAU EN SIBÉRIE.

Par
*B. F. I. HERMANN.*

*Communiqué à l'Académie le* 18 *Août* 1791.

Les haut-fourneaux n'ayant pas encore été connus, on ſe ſervoit pendant pluſieurs ſiècles à la fuſion des mines de fer de petits fourneaux, qu'on appelle Wolfsoefen (fours du loup) Rennherde, Baueroefen (fours des payſans) &, dont on trouve encore quelq'ues uns en Sibérie, en Ruſſie, en Suede & même en Allemagne. Mais dès que les hauts-fourneaux ſont presque généralement employés la plûpart des Métallurgiſtes ne ſe doute guères, que ceux-ci ne méritent pas la préférence ſur les fourneaux anciens; cependant il y a des ſavants d'un grand mérite, parmi lesquels je nomme ſeulement M. M. *du Coudray*, *) le Baron *de Dieterich*, **) & le

*) Mémoire ſur la manière, dont on extrait en Corſe le fer, par Mr. Tronſon du Coudray, Paris, 1775.

**) Deſcription des gîtes de minerai, des forges & des Salines de Pyrénées, par Mr. le Baron de Dieterich, 2 vol. in 4to Paris, 1786.

le Marquis *de la Peirouſe*, *) qui croient prouver le contraire. Ils nous ont donné de excellens deſcriptions des forges du Comté de foix & de la Corſe, où la manière de fondre les mines de fer dans de petits fourneaux aux moyens des trompes à eau eſt encore en uſage. Par la comparaiſon avec les hauts-fourneaux en france ils les ont trouvés beaucoup plus avantageux, parcequ'on y épargne la moitié ou du moins un tiers de charbon, pour produire la même quantité de fer. Selon le calcul de Mr. de *Dieterich* il faut 5 jusqu'à 6½ livres de Charbon pour produire une livre de fer dans les hauts-fourneaux & dans le raffinage aux forges, au lieu qu'à la manière de Catalone ou du Comté de foix on n'a beſoin que trois jusqu'à quatre livres de Charbon ſur chaque livre de fer forgé, ce qui fait une difference ſi conſidérable, qu'elle mérite la plus grande attention de tous les propriétaires des forges. Auſſi Mr. de *Dieterich* s'exprime-t-il là deſſus en ces-termes: „Je les connus à peine, dit-il, les forges du pays de foix, que je fus enthuſiasmé de l'économie & de la ſimplicité des procédés & des atteliers; & dès mon retour à Paris je propoſai à l'adminiſtration royale & à celle de Monſ. Comte d'Artois, de m'autoriſer à faire faire dans le pays de foix des eſſais de cette methode avec des mines tirées des differentes provinces du royaume, &, particulierement avec des mines en grains. Dans le cas d'un plein ſuccès, ce procédé devoit épargner un bon tiers de Charbon ſur la conſommation ordinaire de la fabrication uſitée dans le reſte du royaume. J'en avois donné la preuve par des tableaux de Comparaiſon; Mr. *du Coudray* portoit même cette économie du Charbon à près de moitié." (ouvrage cité T. I. pag. 35).

On

*) Mémoire ſur les mines & les forges du Comté de foix, par M. le Marquis de la Peirouſe, Paris, 1787.

On croit que cette différence vient de ce qu'au lieu de convertir la mine en fonte, comme dans les hauts-fourneaux, pour être portée dans les affineries, puis dans les chaufferies, la mine dans le comté de Foix eſt immediatement reduite en fer forgé, & etirée dans un ſeul feu ſans avoir paſſé par l'état de fonte. Les eſſais, que Mr. de *Dieterich* a fait pour traiter de cette manière quelques autres mines de fer de la France n'ont pas eu un plein ſuccès; cependant il aſſure, qu'il ne ſoit pas douteux pour toutes les mines en roche, dont la nature n'eſt pas vicieuſe. Mais c'eſt le point le plus important; les mines riches & d'une bonne qualité ne laiſſent pas d'être traitables à la manière du Comté de Foix, mais celles d'une nature vicieuſe où les mines pauvres ne le ſont guères. Celles-ci, faiſant presque partout une bonne partie de l'exploitation, ont ſûrement donné lieu à l'uſage des hauts-fourneaux, aux moyens desquels ont vient à bout de convertir en bon fer la mine la plus rebelle, ce qui ne réuſſit pas ou très difficilement à la manière du pays de Foix.

La grande quantité de fonte, que produiſent les hauts-fourneaux en peu de tems eſt encore un grand avantage, ſurtout dans les contrés, où l'on eſt obligé de transporter les mines ou la fonte, pour être convertie en fer forgé, fort loin du lieu de l'exploitation. Mais le produit des hauts-fourneaux d'un pays diffère quelquefois beaucoup de celui d'un autre. La grandeur, la proportion de la ſtructure intérieure, & le régence du feu influent autant ſur le prix du produit, que la qualité de la mine. Il y a des hauts-fourneaux, qui produiſent une ſi énorme quantité de fonte, en n'y conſommant pas une quantite excéſſive de Charbon, qu'on eſt tenté à croire, qu'on ne ſauroit rien imaginer de plus

profitable dans ce genre des travaux métallurgiques. Mais pour s'aſſurer la quelle de ces deux méthodes, de traiter les mines de fer à la manière du comté de Foix où dans les hauts-fourneaux, en convertant enſuite la fonte en fer forgé par le raffinage, ſoit la meilleure, il faudroit entreprendre des eſſais continués pendant un longs tems avec la même mine, ſous les mêmes circonſtances & au même lieu. En ſuppoſant que la plûpart des mines de fer, comme en Sibérie, où la plus grande partie conſiſte en mines de roche, ſoit ſusceptible d'être traitée à la manière de Foix, l'avantage, qui en réſulteroit de l'épargne du Charbon, ſeroit ſi conſidérable, qu'il eſt fort à ſouhaiter, que cette méthode y ſoit introduite, parcequ'à preſent pour produire une livre de fer, on y a beſoin presqu'une auſſi grande quantité de Charbon qu'en France.

Les montagnes Ouraliennes p. ex. produiſent annuellement plus de 3½ millions de pouds de fer forgé, en y employant à peu près 20 mill. de charbon de ſapins. Ce ſeroit un objet très-important, que d'y en épargner le tiers; & dans quelques autres pays peut-être le profit ſeroit encore plus grand, car il y a tout lieu à croire, que les hauts-fourneaux de Sibérie rendent conſidérablement plus d'avantage, que ceux de beaucoup d'autres provinces & il n'y a ſurement aucune, où ils rendent dans un certain tems autant de fer de fonte qu'en Siberie, quoique il y ait quelques uns, qui en doutent.

Pour démontrer cette aſſértion, pour ſervir les ſavans dans leurs comparaiſons de ces deux méthodes, qui ſont à portée de les faire avec exactitude, & en même tems pour faire connoitre la manière uſitee aux fonderies de fer de ce pays,

pays, je me ſuis propoſé de rendre ici un Notice du haut-fourneau & du procédé de la fabrique impériale de Kamensk, en y joignant des tables authentiques & détaillées de la production journalière en fer de fonte d'un an entier & des matériaux y employés. Je ſuis convaincu, qu'il n'y a rien de plus utile pour le progrès de la Métallurgie, que les deſcriptions des procédés, dont les réſultats ſont prouvés & démontrés par des tables pareilles. Sans cela on n'acquiert qu'une connoiſſance fort imparfaite d'un établiſſement quelconque, ne pouvant pas déterminer au juſte le produit du métal, ni les dépenſes réelles des matériaux.

La fabrique de Kamensk eſt ſituée aux monts d'Oural ſur leur pente orientale à la gauche de la riviere d'Iſſet auprès de la petite riviere Kamenka, 90 verſtes de Cathérinebourg. Elle ſe trouve pesque dans une plaine, & ſes mines ſe rencontrent dans des Collines, qui ne ſont guères plus élevées, que celle-là. Ces mines de fer conſtiſtent dans les eſpéces ſuivantes :

1.) Mines de fer ochraceuſes, (Minera ferri ochracea) d'une couleur jaune, rougeatre & brunâtre.

2.) Mines de fer ſabloneuſes; (Minera ferri arenacea indurata).

3.) Mines de fer limoneuſes; (Minera ferri argillacea lapidea). Elles ſe rencontrent pour la plûpart en géodes, dont la grandeur varie beaucoup & qui renferment à l'ordinaire

4.) Des Haematites ſtalactitiques noires, presque toujours couvertes d'une ochre de Manganaiſe noire très-fine. Quelquefois celle-ci ſe trouve en petites aiguilles & en criſtaux d'une lueur argentine.

5.) Mines de fer blanches argilleuſes (Minera ferri alba argillacea, thonigter Stahlſtein). Cette eſpéce ne ſe trouve que dans une ſeule minière en maſſes aſſez conſidérables, dont les fentes ſont remplies des hématites ſtalactitiques.

La plus grande partie de l'exploitation de ces mines conſiſte en $N^{ro:}$ 2. 3 et 4. Celle de N°. 1. n'eſt qu'accésſoire, & la mine blanche ſuffit à peine pour améliorer la fonte, qui ſert à la fabrication de l'acier.

La mine exploitée eſt miſe en grands tas, qui contiennent de 10, 000 jusqu'à 30, 000 pouds pour la griller en plein air ou à ciel ouvert au moyen du bois, poſé dans un quarré de l'un epaiſſeur environ d'une arſchine. Le grillage ſe fait en 8 à 15 jours. Alors la mine eſt tranſportée à la fabrique & concaſſée avec des marteaux à main en morceaux d'une groſſeur des noix & des oeufs.

Le *haut-fourneau* de Kamensk a préſentement une *hauteur* de 13 arſchines ou 28 $\frac{332}{731}$ pieds de Paris en comptant depuis le carreau du creuſet jusqu'à la gueule où l'on mêt le charbon; (vom Herdſtein bis zur Schür) il eſt conſtruit ſans cheminée.

Le *Creuſet* (das Geſtelle) a 3 archin. de long, & à l'endroit, où l'on fait couler le métal 1 arch. de large, vis-à-vis de celui-ci il a 14 verchoks de large & en tout 3 arſchin. de haut. Les épaules (die Raſt) ont une largeur de 1½ arſch. Immediatement ſur celles-ci trouve-t-on la plus grande circonférence de l'intérieur du fourneau, dont le diamétre a 4½ arſch. & celui de l'orifice ſuperieur a 3 arſch.

Les

Les creuſets & les parois intérieurs du fourneau ſont maçonnés d'une eſpece de pierre talqueuſe melée de beaucoup de quarz, qui ſe trouve dans la montagne, qu'on appele Totſchilnaya-Gora. La figure intérieure du creuſet préſente un quarré oblong, mais le reſte du fourneau eſt rond. Les parois intérieurs ou les fauſſes parois ſont conſtruite en briques.

La *tuyere* ſe fait ici de l'argille humide, qu'on applique dans un trou pratiqué dans la pierre, par la quelle le vent eſt conduit dans le fourneau. Ce trou ſe trouve 13 verſchoks au deſſus du carreau du creuſet; celui-ci eſt conſtruit avec une ouverture, qu'on appele la *timpe*, (Tümpel) par laquelle on rétire les ſcories, qui nagent ſur le métal fondu. On place la tuyere presque horizontalement; elle enfonce à peu-près 3 à 4 verſch. dans le fourneau. L'oeul ou ſa bouche a 1¼ verſch. de haut ſur 2 verſch. de large. Celle-ci doit être réparee, à meſure qu'elle eſt brulée par la force du feu ou emportée par les ſcories.

Les deux *ſouflets* de bois ont 9 arſchines, & les touyaux ou les buſes y appartenantes ont presque 2 arſchines de longueur. Ceux-ci ſont faites de fer de fonte, & le diamétre de leur orifice va jusqu'à 2 verſchoks. Ils ſont mis en mouvement par une roue à eau, qui a 6 arſch. de haut, ſur 2 arſch. de large.

Après avoir bien chauffé le haut-fourneau on commence la fuſion en le chargeant d'abord tout plein des charbons de ſapins ſans mines, ce qui ſe fait avec 20 à 21 corbeilles, dont chacune peſe environ 20 pouds. On mêt le feu par la tuyere, en faiſant aller doucement les ſouflets &

 en

en 15 à 18 heures la flamme ſe montre au haut du fourneau; dèslors les charges (Колошъ) ſont données avec de la mine, mais de manière, que pendant la prémiere ſemaine la quantité de mines eſt augmentée peu à peu de 5 pouds ſur la Corbeille de charbon jusqu'à 15 ou 18 pouds. Dans la ſuite à meſure que le fourneau acquiert plus de chaleur on augmente la mine de 20 jusqu'à 25 pouds ſur chaque corbeille.

La caſtine, qu'on employe ici, eſt une pierre calcaire ſtratifiée, & pour la plùpart remplie des coquillages petrifiés. Elle eſt en partie brulée ou reduite en chaux; l'autre partie reſte crue. De toutes les deux éſpeces on employe ſur chaque charge de 2, 3, 4 jusqu'à 5 pouds ſelon la réuſſite de la fuſion & la qualité requiſe de la fonte.

Quand le fourneau demande une nouvelle charge on commence à mettre premièrement le Charbon, ſur le charbon la mine & ſur celle-ci le Caſtine. La mine & la Caſtine ſont diſpoſées dans un cercle à l'entour du bord de la gueule ou de l'orifice du fourneau, le quel prend chaque heure une charge & quelquefois en ¾ d'heures, de ſorte qu'en 24 heures il conſomme 25 jusqu'à 30 charges & plus.

Pour l'ordinaire on fait couler la fonte trois fois en 24 heures, ou ſeulement 5 fois en 2 jours, en cas qu'on veut plus purifier le métal; mais quand on a en vue de produire une fonte dure, blanche & ſtrice; on donne plus de mines ſur la charge & fait couler le métal plus ſouvent. Le contraire arrive lorsque la fonte réſide plus long tems dans le fourneau; dans ce cas elle devient ici compacte, griſe & molle, au lieu qu'en quelques endroits en Allemagne la fonte acquiert

acquiert la couleur blanche, quand elle eſt bien purifiée & long tems tenue au fourneau, ce qui dépend pour la plupart de la grandeur du four. Quelque longtems, qu'on tient ici le métal au bain il ne devient que plus compacte, plus gris & plus mou; il endomage en même tems très ſenſiblement le creuſet en s'attachant fortement à ſes parois. On peut remédier à cet accident, en augmentant les charges & le mouvement des ſouflets, par la direction de la tuyere, laquelle doit être formée plus étroitement en la dirigeant en même tems un peu plus vers le fond.

Quant à la régence du feu on obſerve pluſieurs rémarques, pour juger, ſi le fourneau eſt dans ſon état requis, & ſi la fuſion produira une fonte de la qualite ſouhaitée; l'obſervation la plus commune & la plus decidante eſt tirée des ſcories. Au commencement de la fuſion, ou quand on a donné plus de mine que de Charbon, comme dans la proportion ordinaire, elles ſont toujours noires ou d'un verd foncé & très péſantes; mais quand le fourneau a ſa chaleur néceſſaire, quand on donne un ſurplus de charbon, en melant aſſez de Caſtine avec la mine, & en faiſant réſider longtems le métal au fourneau, les ſcories ſortent pour la plupart toujours très blanches, remplies d'une infinité de cavites, étant en même tems ſi legéres, qu'elles nagent ſur l'eau. Quelquefois elles ſont verdâtres, tirant ſur le bleu, & compactes. Dans ce cas la fonte eſt d'une qualité moyenne, c'eſt-à-dire elle n'eſt pas trop dure & non plus trop molle ou trop longtems tenue au bain, ce qui augmente le déchet.

En

En ſuivant ce procédé le haut-fourneau de Kamensk a produit du 21 Décembre 1787 jusqu'au 24 d'Août 1788, la quantite de fonte ſousdite :

## Table prémiere

### du produit en fer de fonte en 1788.

| | Jours. | Charges. | Matériaux. Charb. Corbeilles | Mine Pouds | Mine liv. | Caſtine Pouds | Caſtine liv. | Produit en fer de fonte. Pouds | Produit en fer de fonte. liv. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Du 21ᵉ jusqu'au 31ᵉ 1787 - - | 11 | 174 | 139⅕ | 2677 | - - | 299 | 30 | 877 | 30 |
| Janvier 1788 - | 31 | 849 | 680⅘ | 18373 | - - | 2553 | 20 | 8207 | 15 |
| Février - - - | 28 | 844 | 675⅕ | 18971 | - - | 2859 | - - | 8923 | 35 |
| Mars - - - - | 31 | 919 | 735⅕ | 20780 | - - | 3127 | 20 | 9788 | 37 |
| Avril - - - - | 30 | 828 | 662⅖ | 17738 | - - | 2895 | - - | 8392 | 20 |
| Mai - - - - | 31 | 843 | 674⅖ | 18532 | - - | 2950 | 20 | 9094 | 20 |
| Juin - - - - | 30 | 808 | 646⅖ | 17770 | - - | 3016 | 20 | 8240 | 20 |
| Juillet - - - | 31 | 827 | 661⅗ | 16962 | 20 | 2815 | - - | 7488 | 35 |
| Août jusqu'au 24 | 24 | 639 | 511⅕ | 12593 | - - | 2019 | 20 | 5461 | 10 |
| total. - | 247 | 6731 | 5386⅖ | 144396 | 20 | 22539 | 10 | 6047[illegible] | 22 |

En comparant les matériaux conſommés avec le produit & le tems du fondage il en réſulte le calcul ſuivant :

Ta-

## Table ſeconde.

### Comparaiſon du produit avec les matériaux y conſommés en 1788.

| | En 24 heures le fourneau a produit en fer de fonte. | | Le fourneau a conſommé dans ce même tems des mines. | | 100 Pouds de mine ont produits en fer de fonte. | | Sur 100 Pouds de mine on a conſommé de la caſtine. | | Pour fondre 100 P. de mines on a eu beſoin de charbon. | En 24 heures il y avoit des charges. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Corbeilles. | nombre |
| Décembre 1787 | 79 | $32\frac{8}{11}$ | 243 | $14\frac{6}{11}$ | 32 | $30\frac{4}{26}$ | 10 | $10\frac{14}{26}$ | $5\frac{6}{26}$ | $14\frac{10}{11}$ |
| Janvier 1788 - | 264 | $26\frac{28}{31}$ | 592 | $27\frac{3}{31}$ | 44 | $26\frac{15}{18}$ | 13 | - - $\frac{25}{40}$ | $3\frac{13}{18}$ | $27\frac{12}{31}$ |
| Février - - | 300 | $34\frac{3}{28}$ | 677 | $3\frac{6}{14}$ | 47 | $1\frac{11}{18}$ | 15 | $2\frac{15}{18}$ | $3\frac{10}{18}$ | $30\frac{4}{28}$ |
| Mars - - - | 315 | $30\frac{27}{31}$ | 673 | - $\frac{28}{31}$ | 47 | - $\frac{8}{20}$ | 15 | 2 | $3\frac{1}{20}$ | $29\frac{20}{31}$ |
| Avril - - - | 279 | 30 | 591 | $10\frac{20}{30}$ | 47 | $12\frac{9}{17}$ | 16 | $13\frac{4}{17}$ | $3\frac{12}{17}$ | $27\frac{15}{30}$ |
| Mai - - - | 293 | $1\frac{26}{31}$ | 597 | $32\frac{8}{21}$ | 49 | 3 | 16 | $2\frac{4}{18}$ | $3\frac{11}{18}$ | $27\frac{6}{31}$ |
| Juin - - - | 274 | $27\frac{10}{30}$ | 592 | $13\frac{10}{30}$ | 46 | $14\frac{14}{17}$ | 16 | 39 | $3\frac{11}{17}$ | $26\frac{28}{30}$ |
| Juillet - - - | 241 | $23\frac{2}{31}$ | 547 | $7\frac{3}{31}$ | 44 | 6 | 16 | $23\frac{13}{16}$ | $3\frac{15}{16}$ | $26\frac{21}{31}$ |
| Août - - - | 227 | $22\frac{2}{24}$ | 524 | $28\frac{1}{3}$ | 43 | $14\frac{8}{12}$ | 16 | - - $\frac{8}{12}$ | $4\frac{7}{25}$ | $26\frac{15}{24}$ |
| En total l'un portant l'autre - | 269 | $5\frac{67}{247}$ | 584 | $24\frac{12}{247}$ | 46 | $2\frac{23726}{144397}$ | 15 | $24\frac{52872}{144397}$ | $3\frac{105509}{144397}$ | $27\frac{62}{247}$ |

Avec une corbeille de charbon on a donc produit 12 Pouds $13\frac{3249}{5387}$ liv. de fer de fonte, où pour produire une livre de fonte il falloit $1\frac{307}{493}$ liv. de charbon de ſapins.

# Table troiſieme

## du produit en fer de fonte en 1789 & 1790.

| | Jours. | Charges | Matériaux. Charbon. Corbeille. | Mine. Pouds. | Mine. liv. | Caſtine. Pouds. | Caſtine. liv. | Produit en fer de fonte Pouds. | Produit en fer de fonte liv. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Du 23e Novembre jusqu'au 31e 1788 | 8 | 95 | 76 | 1187 | - - | 135 | 20 | 260 | - - |
| Décembre - - | 31 | 944 | 755⅓ | 16756 | - - | 3035 | - - | 7484 | 2 |
| Janvier 1789 - | 31 | 814 | 814 | 18577 | - - | 3290 | 20 | 9355 | 7 |
| Février - - - | 28 | 778 | 778 | 17106 | - - | 3225 | - - | 8192 | 23 |
| Mars - - - | 31 | 880 | 880 | 19582 | - - | 4168 | - - | 10112 | 30 |
| Avril - - - | 30 | 826 | 826 | 18931 | - - | 3764 | - - | 10050 | - - |
| Mai - - - - | 31 | 869 | 869 | 20462 | - - | 3846 | - - | 10520 | 33 |
| Juin - - - - | 30 | 813 | 813 | 17066 | - - | 3200 | 20 | 8674 | 33 |
| Juillet - - - | 31 | 878 | 878 | 18538 | - - | 3881 | 20 | 9056 | 19 |
| Août - - - - | 31 | 899 | 899 | 20428 | - - | 4325 | 20 | 10074 | 32 |
| Septembre - - | 30 | 816 | 816 | 16685 | - - | 3849 | - - | 7571 | 17 |
| Octobre - - - | 31 | 981 | 981 | 21965 | - - | 4790 | - - | 10192 | - - |
| Novembre - - | 30 | 965 | 965 | 21100 | - - | 4825 | - - | 9573 | 15 |
| Décembre - - | 31 | 1082 | 1065⅔ | 24834 | - - | 5702 | 20 | 11181 | 16 |
| Janvier 1790 - | 31 | 1044 | 1044 | 25636 | - - | 5565 | - - | 11736 | 18 |
| Février - - - | 28 | 936 | 936 | 22451 | - - | 5022 | - - | 10065 | 25 |
| Mars - - - - | 31 | 1033 | 1033 | 25588 | - - | 6088 | 20 | 11237 | - - |
| Avril - - - - | 30 | 875 | 875 | 21553 | - - | 5553 | 20 | 9665 | 3 |
| Mai - - - - | 5 | 127 | 127 | 2920 | - - | 775 | 20 | 1402 | 30 |
| total - | 529 | 15655 | 15430⅗ | 351365 | - - | 75042 | 20 | 166406 | 20 |

En comparant les matériaux conſommés avec le produit & le tems du fondage il en réſulte le calcul ſuivant:

Ta-

# Table quatrième.

## Comparaiſon du produit avec les matériaux y conſommés en 1789 & 1790.

| | En 24 heures le fourneau a produit en fer de fonte. | | Le fourneau a conſommé dans le même tems de mine. | | 100 Pouds de mine ont produits en fer de fonte. | | Sur 100 Pouds de mine on a conſommé de la Caſtine. | | Pour fondre 100 P. de mine on a eu beſoin de Charbon. | En 24 heures il y avoit des charges. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Pouds | liv. | Corbeilles | nombre. |
| Novembre 1788 | 32 | 10 | 148 | 15 | 21 | $36\frac{1}{11}$ | 11 | $1\frac{7}{11}$ | $6\frac{4}{11}$ | $11\frac{7}{8}$ |
| Décembre - - | 241 | $16\frac{3}{4}$ | 540 | $20\frac{1}{2}$ | 44 | $26\frac{1}{2}$ | 18 | 4 | $4\frac{12}{24}$ | 30 |
| Janvier 1789 - | 302 | 9 | 599 | 10 | 50 | 14 | 17 | 28 | $4\frac{8}{24}$ | 26 |
| Février - - - | 292 | 23 | 610 | 37 | 47 | 30 | 18 | 30 | $4\frac{1}{2}$ | 27 |
| Mars - - - | 326 | $8\frac{1}{2}$ | 631 | 27 | 51 | $25\frac{3}{4}$ | 21 | 11 | $4\frac{11}{24}$ | $28\frac{1}{4}$ |
| Avril - - - | 335 | - - | 631 | - - | 53 | 3 | 19 | 35 | $4\frac{9}{24}$ | $27\frac{1}{2}$ |
| Mai - - - | 347 | $17\frac{1}{2}$ | 660 | - - | 52 | $25\frac{1}{2}$ | 13 | 20 | $4\frac{5}{24}$ | $28\frac{1}{31}$ |
| Juin - - - | 289 | $14\frac{1}{2}$ | 568 | $34\frac{1}{2}$ | 50 | $33\frac{1}{4}$ | 18 | 30 | $4\frac{18}{24}$ | 27 |
| Juillet - - - | 292 | 8 | 598 | - - | 49 | 10 | 20 | $37\frac{1}{2}$ | $4\frac{17}{24}$ | $28\frac{1}{3}$ |
| Août - - - | 324 | $39\frac{1}{2}$ | 678 | 13 | 49 | $12\frac{3}{4}$ | 21 | $6\frac{3}{4}$ | $4\frac{9}{24}$ | 29 |
| Septembre - - | 252 | 22 | 556 | $6\frac{1}{4}$ | 45 | 15 | 23 | - - | $4\frac{21}{24}$ | 27 |
| Octobre - - - | 328 | 31 | 708 | 22 | 46 | 16 | 21 | $32\frac{1}{4}$ | $4\frac{11}{24}$ | $31\frac{5}{8}$ |
| Novembre - - | 319 | $4\frac{1}{2}$ | 703 | 13 | 45 | $14\frac{1}{2}$ | 22 | $34\frac{3}{4}$ | $4\frac{13}{24}$ | $32\frac{1}{5}$ |
| Décembre - - | 360 | $27\frac{1}{2}$ | 801 | $3\frac{3}{4}$ | 45 | - - | 22 | $38\frac{1}{2}$ | $4\frac{1}{2}$ | $34\frac{23}{31}$ |
| Janvier 1790 - | 378 | $22\frac{29}{31}$ | 826 | $38\frac{22}{31}$ | 45 | 31 | 21 | $28\frac{1}{2}$ | $4\frac{1}{16}$ | $33\frac{21}{31}$ |
| Février - - - | 359 | $19\frac{1}{4}$ | 801 | $32\frac{1}{2}$ | 44 | 33 | 22 | $14\frac{1}{2}$ | $4\frac{2}{16}$ | $33\frac{3}{7}$ |
| Mars - - - | 362 | $19\frac{1}{4}$ | 825 | $16\frac{3}{4}$ | 43 | $36\frac{1}{2}$ | 23 | $31\frac{3}{4}$ | 4 | $33\frac{1}{3}$ |
| Avril - - - | 322 | 7 | 718 | $17\frac{1}{4}$ | 44 | $33\frac{1}{2}$ | 25 | $30\frac{1}{2}$ | 4 | 29 |
| Mai - - - | 280 | 22 | 584 | - - | 48 | $1\frac{16}{29}$ | 26 | $32\frac{9}{29}$ | $4\frac{10}{29}$ | $21\frac{2}{5}$ |
| En total l'un portant l'autre - | 314 | $22\frac{382}{529}$ | 664 | $28\frac{228}{529}$ | 47 | $14\frac{140690}{3513365}$ | 21 | $14\frac{104290}{3513365}$ | $4\frac{137640}{3573365}$ | $29\frac{314}{529}$ |

 Avec

Avec une corbeille de Charbon on a donc produit 10 pouds $31\frac{5449}{15431}$ liv. de fer de fonte, où pour produire une livre de fonte il falloit $1\frac{369}{431}$ liv. de charbon de Sapins. — Il faut obſerver, que depuis le mois d'août 1788 la hauteur du fourneau a été augmentée d'une arſchine ſans rien changer dans ſa Conſtruction intérieure; par là on a obtenû par jour une plus grande quantité de fonte & le fondage en a été conſidérablement accéléré. La qualité de la fonte n'en a rien perdue non plus; mais la Conſommation de Charbon eſt plus grande, de ſorte qu'à preſent le fourneau donne ſur chaque corbeille $62\frac{1}{3}$ livres moins de fonte qu'auparavant; cependant ſur une livre de fonte on ne peut pas compter plus que $1\frac{4}{5}$ liv. de Charbon.

Dans les forges de la Sibérie le déchet eſt présque partout un tiers, quelques livres de plus ou de moins; auſſi la fonte de Kamensk en la travaillant en fer de barres, ſouffre un tiers de déchet; par ex. de 90 pouds de fonte on ne reçoit que 60 pouds de fer forgé, dont les barres ont 3 pouces de large ſur $\frac{3}{4}$ pouces d'épaiſſeur. Pour produire cette quantité de fer on conſomme à l'ordinaire 9 Corbeilles de Charbon de ſapins, ce qui fait 180 pouds; toute la conſommation de Charbon pour la fonte & le raffinage fait donc 342 pouds ou 13680 liv. ainſi pour produire une livre de fer en barres il faut $5\frac{2}{3}$ livres de charbon, le fer forgé obtenu de 90 pouds de fer cru faiſant 60 pouds ou 2400 livres.

Ta-

# OBSERVATIONS
## SUR
# DIFFERENTES ÉSPÉCES DE PIERRES
## DE ROCHE COMPOSEÉS ROULÉES DES ENVIRONS DU CANAL DE LADOGA *).

Par
*BASILE SEWERGUINE.*

*Communiqué à l'Académie le 1 Sept. 1791.*

Ce n'eſt pas toujours dans les pays lointains, qu'il faut aller chercher les objets dignes d'attention. Souvent nous les foulons ſous non pas daignant à peine leur accorder un oeil favorable, & pourtant j'oſe le dire, ce ſont autant de corps remarquables, dignes de toute contemplation ſerieuſe. Telles ſont entre autres les pierres roulées, que l'on employe ici pour paver les rues, pour remplir les marais, & pour tant d'autres uſages. Elle m'ont parues preſenter trop de phenomênes rémarquables pour les paſſer tout à fait ſous ſilence. On les retire prés du Canal de Ladoga aux environs de Schlüſſelbourg, où ces pierres roulées ſont entaſſées, l'une

 ſur

*) Avans de paſſer plus loin dans mes recherches ſur les pierres de roches en généal, j'ai cru devoir y ajouter ces obſervations, qui pourront être de quelque utilité dans la ſuite. On peut les régarder comme des ſupplements à mon eſſay ſur les pierres de roche compoſées.

ſur l'autre de la ſorte, qu'elles y forment des collines ou des montagnes entières. Elles ſont toutes de la nature des pierres de roche compoſées. Toutes nous peuvent donner quelques idées, peut être, ſur la nature de la contrée entière du gouvernement de Wibourg, d'Olonetz & de quelques pays circonvoiſins. On ſait que les parties conſtituantes de ces éſpeces de pierres varient beaucoup. J'en citerai de 40 différentes combinaiſons avec leurs varietés, je les accompagnerai des obſervations, que j'ai faites la deſſus, & tacherai de tirer une parallele avec celles des autres pays, qui leur ſont analogue. On ſait & on le verra dans la ſuite, que la pluspart des montagnes qui en conſiſtent fourniſſent des gites de mineraux les plus utiles. Donc ſi une fois d'aprés les échantillons, dont je vais donner la deſcription, on parviendra à decouvrir les rochers, dont elles ont été arrachées, on aura peut être un moyen de plus pour s'enrichir des dons de la nature.

## Enumeration de différentes éſpéces de pierres de roche compoſées roulées des environs du Canal de Ladoga.

Article I. Pierres de roche compoſées, ou le principe Calcaire predomine.

A. *De deux parties conſtituantes.*

1.) Marbre & Spath calcaire: le premier eſt gris noirâtre, l'autre blanc; il eſt rémarquable, que ce ſpath à des ſtries paralleles à ſa ſurface, mais elles ne viennent peut être que de quelques cauſes accidentelles.

2.) Marbre & Mica, l'un bleuvatre & l'autre argentin & diſperſé par le Marbre en petites paillettes.

3.)

3.) Marbre & Quarz: l'un blanc & l'autre rouge, ſouvent en criſtaux piramidals. — Le Saxum Sahlbergenſe de Linnée, qui a les mêmes parties conſtituantes ſert d'enveloppe aux galênes de Plomb de Sahlberg; & une ſorte de pierre, qui lui eſt analogue contient de la mine d'argent blanche à Kapnick. Le Saxum Helenae ſur l'isle d'Helene, & le ſaxum margariticum en Nerice me ſemblent être auſſi à peu de choſe prés les mêmes, que l'éſpéce que j'ai decrite ici.

4.) Marbre & Feldſpath: éſpéce trés rémarquable, où le Marbre eſt de couleur griſe & le Feldſpath de couleur blanchâtre & qui ſe manifeſte en grands rombes luiſants au Soleil. — On dit, qu'il y ait une combinaiſon du Spath calcaire avec le Feldſpath à Bornholm, qui contient de la galêne de plomb.

5.) Marbre & Asbeſt; ce dernier eſt toujours plus ou moins verd, quelquefois d'une nuance tres agréable & tres luiſant.

B. *De trois parties conſtituantes.*

6.) Marbre, Asbeſt & Spath calcaire: il y en a deux variétes.

a) l'une, où toutes les parties conſtituantes ſont blanches, & ne ſe diſtinguent que par leur forme differente.

b) l'autre, où le Marbre eſt gris, l'Asbert verd, & le ſpath calcaire blanc.

7.) Marbre gris foncé, Asbeſt verd, & Schoerl noir & trés luiſant.

8.)

8.) Marbre blanc, Feldſpath rouge en particules trés minces & de l'argille endurcie noirâtre.

9.) Grés calcaire blanchâtre avec de l'Asbeſt verd & du Mica; cette éſpece devient ferrugineuſe à ſa ſurface.

10.) Spath calcaire blanc, Quarz brun, & Asbert verd.

C. *De quatre parties conſtituantes.*

11.) Marbre blanc, Spath calcaire blanc, Asbert verd & Quartz.

Toutes ces différentes éſpéces de pierres de roche compoſées ſont employées en plus ou moins grande quantité à la conſtruction de l'Egliſe de St. Iſaak & viennent pour la plûs part, des environs du village de Roaskale en Carelie; celles, qui ſuivent, ont été ramaſſées, comme je l'ai dit, parmi les pierres roulées, que l'on apporte ici en abondance.

## Art. II. Pierres de roche compoſées, ou le principe argilleux predomine.

A. *De deux parties conſtituantes.*

12.) Hornblende & Quarz; il y en a deux varietés.

a) l'une où la Hornblende eſt de couleur griſe claire, & toute la pierre tellement detruite par le laps du tems, qu'elle eſt presque entièrement reduite en une terre verdatre, dont l'écorce ou la ſuperficie eſt trés raboteuſe, & toujours verte.

b) l'autre eſt plus dure, & la Hornblende noire foncée.

On trouve à Aedelfors, à Rydderhütta & à Norberg en Weſtmannland une éſpéce, qui ſelon moi lui doit être analogue.

lugue. C'eſt le Hornſchieſer de Wallerius qui ſelon lui forme ſouvent la ſalbande de quelques montagnes de Suede. Même le *grünſtein* n'en diffère qu'en peu de choſe.

13.) Hornblende griſe foncée, & Feldſpath blanc.

14.) Mica noir & Feldſpath en rombes blancs.

15.) Mica & Quarz.

a) Mica noir en forme de ſtries & Quartz blanc.

b) La même éſpéce, mais qui eſt plus decompoſée & dont la ſurface eſt enduite d'une écorce argilleuſe entrémelée de beaucoup de Mica jaune & luiſant.

C'eſt le Saxum *Garpenbergenſe* & *Roeroſienſe* de Linnée dont on aſſure, qu'à Garpenberg, à Oſtgothland, à Roeros, & à Bramblé en Norwege, ainſi qu'a Schneberg, prés de Sterzing en Tirole ils contiennent du cuivre; à Aedelfors en Smoland de l'or; à Platte en Bohême de la Molybdene; au Hartz de la mine de plomb; à Kongsberg de l'argent; & enfin à Altenberg prés de Geyer & d'Ehrenfriedersdorf en Saxe de l'Etain. La Pierre de roche de Roeros eſt ſchiſteuſe.

16.) Argille & Mica: éſpéce trés rémarquable, où l'argille eſt griſe & tachetée de pointes luiſantes de Mica noir. On trouve la même combinaiſon prés de Platte en Bohème; à St. Géorgenſtadt en Saxe elle contient du Wolfram; dans l'Épiſcopat de Naſſau de la Molybdène, & à Schmoelnitz dans la Haute Hongrie de la pyrite cuivreuſe. Même le Saxum métalliferum de Mr. de *Born* n'eſt ſouvent melé que d'argille & de Mica, comme à Herrengrund prés de Neuſol &c. ainſi que l'aſſerte Mr. Haydinger.

B. *De trois parties conſtituantes.*

17.) Mica rouge, qui reſſemble beaucoup au cuivre natif, Quarz blanc, & des grenats rouges foncés. Cette éſpéce eſt trés fragile & trés decompoſee. Le *Saxum granoſum* de Linnée, que l'on trouve à Silfberget en Suede, *le Saxum tritorium* de Norvége & de Dalekarlie, le *Saxum punctatum* de Kiaging en Scandinavie, le *Saxum alpinum*, qui forme les plus hautes alpes de la Lapplande & qui ſe trouve en Norvège & en Nerice, & dont on aſſure qu'a Geyer en Saxe il contient de l'Étain, & de mines d'argent & d'or prés de Schemnitz (Gmelin Linnée pag. 622.) & enfin le *Saxum tinnitans* de Weſtgothland n'en différent ſelon moi, qu'en peu de choſe. Ce ſont toutes des varietés de la même éſpéce, où les grenats ſont en plus ou moins grande quantité & plus où moins viſibles. Le Mica du Saxum punctatum eſt argentin.

18.) Schiſte micacé gris, contenant du Mica jaune en taches rondes, & du Quarz blanc en particules à peine appercevables. Cette éſpéce a un teint bleuvâtre. C'eſt peut être le *Saxum Coeruleſcens* de Linnée, que l'on trouve à Smoland.

19.) Argille griſe, contenant du Mica en paillettes trés minces & des grenats trés fins. Souvent ces grenats s'en degagent, & alors ils laiſſent dans l'argille les cavités vuides où giſſoient les grenats.

Art.

## Art. III. Pierres de roche compoſées où le principe Siliceux prédomine.

### A. *De deux parties conſtituantes.*

20.) Quarz & Mica, qui par leur couleur & par leur forme différente preſente pluſieurs variétés que je vais citer.

a) Quarz blanc & mica noir, tous les deux en particules trés minces, mais jointes enſemble trés étroitement. La ſurface eſt dure, mais elle jaunit, & commence à former une écorce jaune ferrugineuſe.

b) De même couleur, mais le Mica eſt parſemé trés régulièrement en petites taches noires par le Quarz blanc compacte, & lui donne un air tigré trés agréable. La ſurface commence à devenir jaune & ferrugineuſe.

c) Quarz gris & compacte, & Mica argentin en pailletes à peine appercevables.

d) Quarz brun & gras, Mica noir en pailletes trés luiſantes, mais jointes enſemble étroitement, & ſeparées de la maſſe du Quarz. La ſurface en eſt jaune ferrugineuſe entremelée de beaucoup de Mica jaune & ſouvent de couleur de gorge de pigeon.

e) Quarz blanc & Mica argentin en petites pailletes parſemées ſans ordre ça & là.

f) Quarz brun en forme de prismes arrangées parallélement l'une auprés de l'autre, & recouvertes de Mica argentin talcqueux. Une varieté, qui pour la forme ſingulière du Quarz m'a parue toujours trés rémarquable. Ce ſont, dirai je des colonnes du Baſalte en miniature.

g) La même variété, mais dont le Mica repréſente pluſieurs rayons, qui ſe raſſemblent tous au même centre.

C'eſt le *Geſtellſtein* des Mineurs Allemands & le *Saxum fornacum* des Mineralogiſtes. Le *Saxum decuſſatum* que l'on trouve à Kallmora en Suede, le *Saxum montanum* & le *Saxum Mareſtrandenſe* que l'on trouve dans la Scandinavie, à Oertra à Silfberget, & ſur l'isle de Mareſtrand (Gmelin Linnée p. 624.) & même le *Sarris*, que l'on trouve à Tourine n'en different qu'en peu de choſe. On aſſure que cette éſpéce contient de la mine d'argent rouge à St. Géorgenſtadt en Saxe, de la mine d'argent blanche à Schladming en Stirie, & de la Molybdéne prés de Platte en Bohéme.

21.) Feldſpath rouge & Quarz blanc, tous le deux en particules, trés minces. On trouve ſelon Mr. Haidinger une pareille éſpéce en Dalekarlie.

22.) Grés Quarzeux & Mica.

a) Grés Quarzeux & Mica noir; cette varieté eſt ſchiſteuſe & recouverte à ſa ſurface de Mica jaune.

b) Grés Quarzeux blanc & Mica noir parſemé reguliérement en taches oblongues. La ſurface eſt enduite d'une écorce ferrugineuſe rouge.

C'eſt le *Saxum undulatum* & le *Saxum Stenonis* de Linnée. On les trouve en Dalekarlie, & ſur le mont Stenshuſrund en Suede. La varieté *b.* eſt à ce qu'il me paroit, juſtement le *Saxum novaculare* que l'on trouve dans la Scandinavie & en Norvege (Gmelin Linnée pag. 612.).

23.)

23.) Feldſpath chatoyant, de couleur violette & Quarz blanc à peine viſible. Des contrées de Péterhof.

24.) Quarz gras & blanc & jaſpe rouge. Mr. de Linnée a donné le nom de ſaxum ſibiricum à une éſpéce qui lui eſt analogue (Gmelins Linnée p. 626.).

25.) Quarz brun avec des taches de grenats; cette éſpéce eſt compacte, mais un peu grenûe & jaunit à ſa ſurface, on apelle une éſpéce qui lui reſſemble, ſi non que le Quarz en eſt verd! *Granit de Bavarie.*

26.) Feldſpath compacte de couleur rouge brun, & Schoerl verd.

27. Feldſpath & Mica.

a) Feldſpath jaune & Mica noir. Cette varieté contient à ſa ſurface beaucoup de Mica jaune.

b) Le Feldſpath eſt rouge. Cette varieté eſt un peu ſchiſteuſe.

Tel eſt le *Saxum fatiſcens* & le *Rapakivi* que l'on trouve en Finnlande.

B. *De trois parties conſtituantes.*

28.) Feldſpath, Quarz & Mica.

a) Feldſpath jaune, Quarz brun, & Mica noir; ces deux derniers melés enſemble y paſſent en veines; le Feldſpath repreſente des grands rombes.

b) Feldſpath blanc jaunâtre, Quarz brun & Mica noir, tous en petites parcelles & trés decompoſés.

c) Feldſpath brun jaunâtre, Quarz brun en forme de grains & Mica noir, qui devient jaune à ſa ſurface.

d) Feldſpath rouge & en forme de cubes, Quarz blanc en forme de grains, & Mica argentin.

e) Feldſpath blanchâtre, Quarz brun, & Mica noir; il y a des endroits, où le Feldſpath eſt en prismes tétraedres.

f) La même varieté, mais où le Feldſpath eſt de couleur de miel.

g) Feldſpath rouge foncé, Quarz noir en forme de grains, & Mica noir.

h) Feldſpath rouge, Quarz blanc, & Mica noir, tous en trés petites parcelles.

i) Feldſpath blanc, Quarz bleuvâtre & Mica noir.

Toutes ces varietés ſont de l'éſpéce de granit, dont on aſſure, qu'il contient quelque ſoit de differentes mines, & même dit on, que les mines d'Étain en Saxe & en Bohème giſſent dans une éſpéce de granit. Le Saxum fuſorium n'eſt qu'un granit decompoſé, & ſert d'envellope aux mines d'Étain criſtalliſées en Bohème (Gmelins Linnée p. 620.) Pluſieurs de ces granits roulés de Ladoga ne cedent aucunement aux grantis orientaux, pour la dureté & la beauté.

29.) Quarz brun reſſemblant au Pétroſilex, Feldſpath brun rougeatre, & Mica jaune. On en trouve de pareille en Smolande & dans la Finnlande Suedoiſe, & Mr. de Linnée deſigne cette éſpéce, ſous le nom de Saxum molinum.

30.) Feldſpath, mica, & Quarz.

a)

a) Feldſpath presque compacte, Mica verd, & Quarz rougeâtre & en forme de grains.

b) Feldſpath blanc, Mica noir, & Quarz gris.

31.) Feldſpath brun rougeâtre, Mica noir, & Schoerl verd.

32.) Quarz gris, Mica noir, & grenats. Quelque fois le *Saxum alpinum* ſe rapproche de cette éſpéce par l'addition du Quarz, & ſe trouve aux mêmes endroits que j'ai cités au N. 17.

33. Feldſpath jaunâtre, Quarz griſâtre & de la Plombagine.

34.) Feldſpath rouge en particules trés minces, Quarz blanc, & ſchiſte micacé. Le Feldſpath eſt melé avec le Quarz & le ſchiſte micacé récouvre cette melange de deux cotés.

C. *De quatre parties conſtituantes.*

35.) Feldſpath gris jaunâtre, Quarz verdâtre, Mica & Schoerl noirs. Le Quarz devient en quelques endroits auſſi bien feuillete que le Feldſpath. Le Schoerl étant beaucoup de fois trés decompoſé n'a aucun éclat.

36.) Feldſpath jaune, Schoerl ſpathique noir, Quarz blanc & Mica noir.

37.) Feldſpath jaune & Feldſpath rouge jaſpitique, Quarz brun & Schoerl noir. Mr. Haydinger cite un pareille exemple de Bohéme.

38.) Feldſpath rouge, Quarz brun & gras, Steatite jaune verdâtre, & Mica argentin. Mr. de Sauſſure & Mr. Hay-

Haydinger citent de pareilles exemples de différents endroits.

39.) Feldſpath brun en petites parcelles, Mica noir en ſtries, des taches de grenats & Quarz blanc.

40.) Feldſpath jaune rougeâtre, Schoerl noir ſpathique, Mica noir, Mica jaune & Quarz blanc.

---

Une choſe tout à fait particulière à nos pierres de roche compoſées, c'eſt qu'il eſt trés rare d'y trouver du Schoerl. La partie la plus abondante eſt le Feldſpath, puis ſuit le Mica; Le Quarz n'y eſt en général, qu'en trés petite quantité. Mais quelques ſoyent leurs parties conſtituantes, j'ai obſervé, qu'à peine commence t-elle à ſe décompoſer qu'elles jauniſſent à leur ſurface, & forment enfin une écorce ferrugineuſe argilleuſe, entremelée de beaucoup de Mica jaune luiſant. Mais en même tems faut-il rémarquer, que ſi c'eſt le Quarz, qui abonde, l'écorce en eſt plus dûre, & ne contient que peu d'argille, & point de Mica. Si c'eſt le Feldſpath, l'écorce en eſt rouge & trés ferrugineuſe; même elle eſt ſouvent entremelée de Mica. Le Mica enfin quelque ſoit ſa couleur dans ſon état naturel, jaunit toujours ou devient rouge aux endroits qui ſont expoſés aux viciſſitudes de l'air. Si c'eſt le Feldſpath qui abonde, le Mica de l'écorce n'eſt que jaune; ſi c'eſt le Mica qui faiſoit la plus grande quantité, alors le Mica decompoſé de l'écorce, preſente pour la pluspart des couleurs de gorge de pigeon. Le Mica de nos granits eſt presque toujours noir. Rien n'eſt de plus aiſé d'aprés ces obſervations, que de conclure, que peut être donc nos granits & autres pierres de roche compoſées, qui contiennent du Mica différemment coloré, peut être, dis je,

je, ne ſont ils plus dans leur état naturel, & ont commencé à ſe décompenſer; une rémarque, qui me paroit d'autant plus digne d'attention, que pluſieurs de ces éſpeces de pierres ſervent d'envellope à quelques éſpéces de mines, comme je l'ai cité plus haut. Car eſt ce dans leur état naturel qu'elles ſont plus avantageuſes pour les mines, ou ſi c'eſt dans l'état de decompoſition? Et ſi ma rémarque eſt juſte, il ſera plus aiſé de decider ce doute, & de fixer l'état favorable & pour les mines & pour leurs récherches, ſans faire mention des récherches phyſiques ſur les montagnes en général qui n'en feront que profitér.

Les pierres de roche compoſées où la Hornblende prédomine, deviennent vertes dans leur état de dècompoſition, & ſont ordinairement enduites d'une écorce raboteuſe & verte, ſans mica & autre melange viſible. On eſt même d'aprés cette écorce aſſez ſûr d'y trouver de la Hornblende.

Enfin le Feldſpath preſente des phénomenes dignes de toute attention ſerieuſe des phyſiciens. Pluſieurs minéralogiſtes y ont trouvé danalogie avec le Schoerl. Sans conteſter leur opinion, je rémarque que j'y ai trouvé plus d'analogie encore avec le Jaspe; car il y a du Feldſpath où d'un coté on voit toute ſa forme ſpathique & ſon air luiſant, & de l'autre il eſt ſouvent compacte, terreux & a tout l'air d'un jaspe rouge ferrugineux. J'ai des échantillons, qui le prouvent trés évidemment. Mais il faut rémarquer, qu'alors le Feldſpath eſt dans un certain degré de décompoſition, & qu'il ne paſſe au Jaspe que dans cet état.

Encore une obſervation & qui eſt de la plus grande importance, c'eſt que dans tous les granits, que l'on apporte

 de

de Finlande pour la conſtruction de nos batimens &c. le Feldſpath git en taches toujours plus ou moins rondes. Que l'on ſe répreſente un vrai pouddingue, & alors on aura une idée de cette forme ſingulière du Granit. Ce ſont d'ailleurs de vrais Granits, qui conſiſtent de Feldſpath, Quarz & Mica, unis étroitement enſemble, & où l'on n'obſerve rien de l'état de décompoſition dont j'ai parlé plus haut. Mais le Feldſpath y eſt toujours en taches rondes entourées de Mica & de Quarz, & c'eſt une obſervation, que je n'ai faite qu'ici, & dont perſonne, ſi je ne me trompe, n'a fait mention encore. Mais elle eſt trés aiſée à faire à quiconque voudra jetter un coup d'oeil ſur les granits qui ſont employés à nos batimens ſuperbes. La couleur du Feldſpath eſt ordinairement jaune ou jaunatre. J'avoue que cela me frappa d'abord, & je penſais auparavant que peut être eſt ce le poli qui en eſt cauſe; mais les granits tout rudes preſentent les mêmes phénomes. Quelle eſt d'aprés cela la formation de nos Granits? J'éſpere de dévellopper mes idées la deſſus dans la dernière partie de l'Eſſay ſur les pierres de roche compoſées.

Pour le Quarz, il eſt comme je l'ai dit, ordinairement en moindre quantité & trés ſouvent en forme de grains, plus ou moins grands. Lorsqu'il eſt en plus grande quantité, il prend ſouvent par gradation une forme plus ou moins feuilletée, & s'unit alors tellement avec le Feldſpath, qu'ils ſemblent former une ſeule maſſe enſemble n'ayant aucun point de diviſion, de ſorte que le Quarz ſemble paſſer au Feldſpath. J'ai dit plus haut que le Feldſpath paſſe au Jaspe. J'éſpere de pouvoir démontrer tout celà par les échantillons, que j'ai ramaſſées.

Enfin plus les parties du Feldſpath ſont minces, & plus la roche, qui en conſiſte tend à ſe décompoſer.

Mais

Mais on voit bien & je l'ai dis tout au commencement que tout celà ne ſont que des pierres roulées. D'ou viennent elles? De quels monts ont elles été arrachées? De quelle contrée, de quel pays ſont elles venues occuper les marais de la Finnlande? Qu'il ſeroit à ſouhaiter, qu'on repaſſe encore une fois les montagnes d'Olonetz! oui; elles ſont dignes de toute l'attention des minéralogiſtes. Pluſieurs des combinaiſons que j'ai citées, favoriſent dans beaucoup de pays les mines les plus beaux & les plus riches. Quelques unes contienent de l'étain dans leur ſein. Quelle acquiſition ne ſeroit ce ſi l'on parviendroit à découvrir leur vrai lieu natal! Quel bel éſperance n'auroit on pas d'avoir un moyen de plus pour embellir les chefs d'oeuvres de la Ruſſie. Les pierres de roche de Suede & de Norvége qui ſont à beaucoup de prés de même nature renferment dans leurs entrailles de l'or & de l'argent. Mais peut être nos pierres roulées ont elles été entrainées de beaucoup plus loin que n'eſt le cercle des monts d'Olonetz, & alors, dira-t-on, toutes nos récherches ſeront inutiles à cet égard. Oui, à cet égard peutêtre; mais les montagnes d'Olonetz en ſont dignes pour bien d'autres, & je conclue cet article par la rémarque que jamais les récherches phyſiques ne peuvent être tout à fait vaines.

---

# DISSERTATIONIS
## DE
# ACIDI ACETI CRYSTALLISATIONE
## CONTINVATIO
## EXHIBENS VARIAS EIVS ET RECENS DETECTAS METHODOS.

Auctore
*TOBIA LOWITZ.*

*Conuent. exhib. die 29 Sept.* 1791.

§. 1.

Prima a me inuenta, quam Ill. Academiae in priori mea hoc de argumento diſſertatione (*) expoſui, acidum aceti ad formam cryſtallinam perducendi methodus, eo adhuc viſa mihi ipſi eſt incommodo laborare, quod ex omni in aceto contenta acidi quantitate non niſi perexiguam eius partem ſub cryſtallorum forma ſegregare mihi licuerit, ita, vt acetum tale glaciale, iſta mea methodo paratum, curioſi magis quam vtilis producti chemici nomen vendicare ſibi potuerit.

Producti huius tam praeſtantia, quam elegantia et phoenominorum ipſius varietate adductus, omnem, quam potui, operam in eo collocavi, vt breviorem concretum hoc praeparandi methodum invenirem, qua id efficeretur, vt omnes in

(*) Vid. Noua Acta Acad. Imp. Scient. T. VII.

in data aceti quantitate contentae partes acidae ſub pulcherrima hac cryſtallorum forma elici poſſent. In quo negotio quantum habuerim ſucceſſum, me quidem iudice proſperrimum, ex ſequentibus patebit.

§. 2. Concentrationis gradum vel fortitudinem, ad quam acetum quodcunque reducere mihi licuit, brevitatis cauſſa, hac in diſſertatione per gradus exprimam, quos ita ſtatuere conſuevi, vt aceti ad examen reuocandi drachmae vni 5 guttas ſolutionis alcalinae e ſalis tartari ſicci et aquae purae partibus aequalibus paratae inſtillarem, tot vicibus, donec in mixtione, obtento ſaturationis puncto, ad inſtar flocculorum promta particularum terrearum oriatur praecipitatio; quo viſo, concentrationis gradum numero deſigno, qui ſignificat, quot vicibus 5 dictae ſolutionis guttas huic negotio impendere debuerim. Si igitur e. g. aceti cuiusdam fortitudinem 6 graduum eſſe dicam; intelligendum eſt, aceti huius drachmam vnam ſexies 5 guttas, id eſt, 30 guttas dictae ſolutionis ad ſaturationem poſtulare; cuius deſignandi rationis vſus et commoditas infra patebit. Atque hic quidem liceat mihi breuitatis cauſſa etiam ſequentes ſtabilire determinationes: acetum concentratiſſimum, quod vehementi frigori expoſitum cryſtalliſationem ſubit, *acetum cryſtalliſabile*; obtentas hac operatione cryſtallos a relicta parte liquida ſeparatas, *acetum glaciale*: et partem liquidam a cryſtallis decantatam, *muriam aceti* nominabo.

Cum porro acetum glaciale ipſum variis adhuc fortitudinis gradibus gaudere poſſit; id aceti acidum, cuius fortitudo ne vllo quidem artificio intendi amplius poteſt, *acetum glaciale fortiſſimum*; hoc vero tenuius, *acetum glaciale debile*, appellabo.



§. 3.

§. 3. Permultis experimentis ſequentia reperi:

1.) Acetum, vt, vehementiſſimo frigori expoſitum, cryſtallorum formationi aptum ſit, fortitudine ad minimum 29 vel 30 graduum pollere debet. Huiusmodi acetum cryſtalliſabile non niſi frigore 190 vel 195 graduum Scalae de Lislianae cryſtallos generat: quo fortius vero hoc acetum eſt, eo minus ad cryſtalliſationem frigus exigit. Vnde liquet, omnem rei cardinem ad conficiendum acetum glaciale in eo inprimis verti, vt aceto dictus concentrationis gradus concilietur.

2.) Aceti glacialis debiliſſimi fortitudo ad minimum 42 graduum eſſe debet; maxima vero 54 graduum eſt, vltra quos concentratio nullo modo intendi poteſt. Hoc aceti acidum, ſi congelatum eſt, vt formam liquidam recuperet, calorem 125 graduum Delislianorum expoſcit.

3.) Muria aceti, ſive relicta a prima vel ſecunda aceti cryſtalliſabilis cryſtalliſatione pars liquida, ſi a phlegmate ſuperuacuo leniſſima deſtillatione liberetur, novae cryſtallorum concretioni apta redditur.

§. 4. Aceti in acetum cryſtalliſabile et glaciale modo dicta diſtributio quamuis reſpectu fortitudinis relatiua tantum ſit, ita vt aceti acidum eiusmodi fortitudinis parari queat, de quo, vtrum acetum cryſtalliſabile fortiſſimum, an glaciale debiliſſimum appellandum ſit, dubitari queat; varia tamen memoratu haud indigna inter ea intercedunt diſcrimina, eaque eo evidentiora, quo magis aceta haec fortitudine a ſe inuicem diſcrepant.

a) Acetum cryſtalliſabile debile non niſi vehementiſſimo frigore; acetum contra glaciale fortiſſimum interdum aeſtiua quoque tempeſtate frigida 130 graduum Scalae Delislianae in cryſtallos coit.

b) In aceto cryſtalliſabili cryſtalli formantur regulares, rhomboideae et prismaticae, glaciei ad inſtar puriſſimae, pelluciditate pulcherrima praeditae, aceti liquidi copia ſuperſtite.

Acetum vero glaciale per totam molem coagulatur, in maſſam albam camphorae aemulam abit, et hoc ipſo momento miram aquae gelaſcentis ſimilitudinem offert.

c) In aceto cryſtalliſabili pars acida, perinde ac in aliis ſalium ſolutionibus, larga quantitate aquae ſolutionis diluta eſt, vel aliis vt vtar verbis: acetum cryſtalliſabile non niſi acidi aceti ſolutio eſt, ad cryſtalliſationis punctum vsque perducta, acetum vero glaciale fortiſſimum non niſi aquam cryſtalliſationis continet; vnde fit, vt gradu caloris neceſſario ad liqueſcentiam orbata, omnis quanta eſt, maſſa congeletur. Comparationis cauſſa ſal mirabile ſic dictum Glauberi allego: cryſtalli ſalis huius ob largam, quam continent, cryſtalliſationis aquam, leuiſſimo etiam calore liquefiunt, eamdemque ob cauſſam et acetum noſtrum glaciale accedente iuſto caloris gradu liqueſcit.

Aquae ſic dictae cryſtalliſationis in aceti acido alia atque alia quantitas eſſe poteſt, vnde aceti glacialis fortitudo varia a 42 gradibus ad 54 vsque gradus originem repetit.

§. 5.

§. 5. Tentaminibus indubiis infra exponendis certo certius compertum habeo, acetum glaciale aqua cryſtalliſationis nulla poſſe arte prorſus priuari. Quam primum enim acetum glaciale ad 54$^{mum}$ fortitudinis gradum perductum eſt; ſi aquae cryſtalliſationis maiorem adhuc copiam ei adimere velis, aceti acidum ex parte in aëris formam ſoluitur, ita, vt fortitudo ipſius vltra dictum gradum nulla encheireſi augeri queat; cuius rei cauſſa, me quidem iudice, ex particularum ignearum ſumma inter ſe appropinquatione repetenda videtur, vnde quoque cryſtallorum aceti facillima liqueſcentia intelligitur; a qua ſententia mea non diſſidet id, quod chemicorum peritiſſimi vno ore iam dudum affirmabant, acetum prae omnibus ceteris acidis vegetabilis proſapiae largiori particularum ignearum copia praeditum eſſe.

§. 6. In priori mea de cryſtalliſatione aceti diſſertatione ita ſenſi, vt, acetum cryſtalliſabile ex ſola aceti frigore concentrati rectificatione ſuper carbonum pulvere originem repetere, putarem, carbonumque non eſſe in hoc negotio niſi eam vim, vt ſuperſtitem in fine deſtillationis in carbonibus aceti fortiſſimi partem a copioſis particulis empyreumatico-oleoſis depurarent. Inſtitutis vero poſtea permultis tentaminibus, carbones ex alia etiam parte ſymbolum ſuum ad hoc negotium conferre, edoctus ſum. In carbonibus nimirum, praeter dephlogiſticatricem, aliam adhuc vim ſingularem reperiri, qua efficitur, vt carbonum puluis, in quacunque aceti frigore concentrati ſuper eum rectificatione particularum acidarum certam et determinatam quantitatem in ſe recipiat, eiusque ita tenax ſit, vt non niſi calore, eo feruentis aquae, longe vehementiori ſub aceti cryſtalliſabilis forma ex eo expelli poſſint.

§. 7.

§. 7. Singularis huius carbonum proprietatis (§. 6.) cognitioni ſequentem nouiſſimam pulcherrimamque aceti concentrandi et cryſtalliſandi methodum debeo.

Aceti vini deſtillati, a particulis ſpirituoſo-inflammabilibus liberati, quantitas quaelibet frigore quantum fieri poteſt concentretur. Acetum hoc concentratum, ſuper quartam carbonum pulueris partem ex mariae balneo euocetur, donec ne vna quidem guttula amplius tranſcenderit. Poſtea retorta cum remanente in ea carbonum puluere arenae balneo immergatur, ignisque ſenſim ſenſimque augeatur, donec per tria ſubinde temporis ſecunda gutta guttam ſequatur. Quam primum deinde guttae per 20 temporis ſecunda decidunt, acetum cryſtalliſabile transgreſſum effundatur in vitrum: nunc enim liquor longe debilior ſequitur. Vaſe refrigerato, remanenti in retorta carbonum pulueri affundatur deſtillatum primum mariae balneo obtentum, iterumque deſtillatio ex mariae balneo inſtituatur, qua finita, retorta perinde ac ante cum remanente carbonum puluere in arenae balneum tranſportetur: ſicque priori aequalem aceti cryſtalliſabilis nouam portionem obtinebis.

Atque hac ratione omnes impenſi aceti particulae acidae in acetum cryſtalliſabile redigi poſſunt, ſi operationes dictae eousque repetantur, donec deſtillatum ex mariae balneo obtinendum omnibus particulis acidis deſtitutum et aquae inſtar inſipidum prorſus tranſierit.

Quo acetum, dicto modo ex arenae balneo obtentum, ſummam contentrationem ſubeat et in acetum glaciale rediga-

 tur;

tur; omnia deſtillata, variis vicibus obtenta, miſcenda et hyemali tempore vehementiori frigori exponenda ſunt: peracta demum cryſtalliſatione, muria aceti ab aceti cryſtallis probe decantetur. Muria haec a cryſtallis decantata, ſi dimidia eius pars debilior leniſſima deſtillatione abſtrahitur, nouae cryſtallorum formationi apta redditur.

Hac methodo ex alcoholis aceti frigore ad 19 fortitudinis gradus redacti libris 10 per 12 dierum interuallum deſtillationibus e duabus retortis ſuper 5 carbonum pulueris libras quinquies repetitis 38 vncias aceti cryſtalliſabilis, et ex his 20 aceti glacialis vncias obtinui.

§. 8. De methodo hic expoſita etiam ſequentia notaſſe, non erit alienum.

a) Quod in hac methodo, cuius benificio acetum, ſine vllo alius corporis connubio, ad ſummum concentrationis gradum perducitur, pulcherrimum eſt, in eo conſiſtit, quod vno eodemque medio, carbonum puluere, duplex vſus obtineatur, aceti nimirum et concentratio et ab inhaerente empyreumate depuratio.

b) Sic et cryſtalliſatio acidi aceti vno quoque eodemque tempore tam ſummam concentrationem, quam perfectiſſimam depurationem efficit, ſiquidem hoc in caſu eae etiam, quae carbonibus ab aceto ſegregari nequeunt, partes heterogeneae in muria aceti ſuperſtites a cryſtallis quam perfectiſſime ſeparantur.

c) Si acetum frigore concentratum ſuper vna carbonum pulveris libra abſtrahitur, quauis deſtillatione 10 et quod excurrit; ſi ſuper duabus libris, 20; ſi ſuper tribus, 30 obtinentur aceti cryſtalliſabis drachmae, ita vt obtinenda

nenda e ſingulis deſtillationibus aceti cryſtalliſabilis quantitas impenſae pulueris carbonum quantitati proportionalis ſit.

d) Aceti huius cryſtalliſabilis fortitudo 36 vel 40 graduum eſſe ſolet.

e) Minimus frigoris gradus, quo acetum hoc cryſtalliſabile ſua ſponte in cryſtallos coit $173^{mus}$ Scalae Delislianae eſt; at infra talem monſtrabo encheireſin, cuius ope cryſtalliſatio eiusdem frigore longe debiliori effici queat.

f) In prima ſuper carbonum puluere deſtillatione acetum cryſtalliſabile flavo tranſit colore; ex omnibus vero deſtillationibus ſequentibus ſuper eodem carbonum puluere aquae inſtar limpidiſſimus liquor eſt.

g) Ex aceto cryſtalliſabili fortitudinis 38 graduum frigore 183 graduum, acetum glaciale 54 graduum obtinui et muriam ab eo decantatam 28 tantum graduum deprehendi.

h) Aceti glacialis muria igne vel leniſſimo deſtillationi ſubmiſſa colorem tamen fuſcum contrahit, ſub deſtillationis fine nigreſcentem. Deſtillatione demum igne quam moderatiſſimo abſoluta, magmatis nigricantis nonnihil, extractiformis, inſipidi fere, omnique aciditate carentis in retorta remanet, quod magma cum ſpiritu nitri fumante tractatum acidi ſachari cryſtallos pulcherrimas facillime largitur.

i) Magma hoc, quod acido-ſaponaceae naturae eſſe videtur, aceti acido tam arcte adhaeret, vt, ſi a cryſtalliſationis adminiculo diſceſſeris, nec carbonum puluere neque etiam repetitis deſtillationibus, ſeparari ab aceto

 per-

perfecte queat. Haecque ipſa ſubſtantia in aceto deſtillato pertinaciter ſuperſtes, ea eſt pars heterogenea, quae Cl. D. Amburgerum in eam deduxit ſententiam, vt contra egregiam acidorum vegetabilium theoriam a Viris Cel. Weſtrumbio et Hermbſtaetio prolatam, aceti acidum in acidum ſachari transformari poſſe falſo ſibi perſuaderet; qualem quoque transformationem complures iique peritiſſimi chemici negarunt iam dudum aceti acidum ab omnibus partibus heterogeneis liberatum ſubire poſſe, atque ego quidem ex aceto meo glaciali puriſſimo acidi nitri concentratiſſimi atque adeo dephlogiſticati adminiculo, acidi ſachari ne hilum quidem obtinui.

k) Ex hac quoque materia ſaponacea empyreumatis et coloris flaui origo repetenda eſt, quo acetum et ſalinae eius praeparationes imbui ſolent.

l) Balneo mariae ignis arenae ſubſtitui poteſt, id quod, ſiquidem ignis iuſto regimine coerceatur, maximum et laboris et temporis compendium affert; ſucceſſus hoc in caſu eo inprimis nititur, vt verſus deſtillationis finem, incipiente aceti cryſtalliſabilis tranſitu, receptaculorum commutatio opportuno tempore fiat, et in obſeruanda hac regula ſumma cautio adhibeatur.

m) Cum, finita quacunque deſtillatione, antequam nova inſtitui queat deſtillatio, vaſa refrigerari oporteat, duas ad hoc negotium adornari retortas conuenit, quarum alterno vſu inſigne temporis compendium obtinetur.

Atque haec ſunt omnia, quae de aceti cryſtalliſabilis et glacialis praeparatione carbonum puluere perficienda notatu digniſſima mihi viſa ſunt.

§. 9.

§. 9. Forma acidi aceti cryſtallina cum haud parum atque eo magis mira mihi initio viſa fuerit, ideo imprimis, quod hucusque acetum meum glaciale non niſi mediante carbonum puluere obtinui; fateor, me ſaepius ambiguum haeſiſſe, merumne aceti acidum ſit quod obtinui concretum cryſtallinum, an vero, carbonum acceſſu, mixtionis et naturae ſuae reſpectu iam quodammodo mutatum? hanc tamen vanam fuiſſe ſuſpicionem, ſequenti experimento didici.

## EXPERIMENTVM I.

Aceti deſtillati, frigore concentrati et fortitudinis 12 graduum Libras 12 deſtillatione per ſe, id eſt, ſine carbonum additione, e cucurbita altiore, alembico inſtructa, igne moderatiſſimo ad ſex circiter remanentis vncias abſtraxi; quo facto, empyreumaticum et fuſci admodum coloris reſiduum, vt a copioſioribus heterogeniis particulis empyreumatico-oleoſis liberarem, ad ſiccitatem vsque e retorta deſtillaui, ſic, prima debiliori parte ſeorſim excepta, vncias tres aceti flaui valde empyreumatici obtinui, cuius fortitudinem cryſtalliſationi aptam, 34 nimirum graduum, deprehendi; et reapſe acetum hoc frigori 181 graduum expoſitum cryſtallos formauit, ſi ab empyreumate, quo fuerunt imbutae, diſceſſeris, iis prioris aceti mei glacialis perfecte aemulas.

Acetum igitur absque carbonum additione ad cryſtallinam adeo formam reduci poteſt. Ceteroquin methodus haec, etſi prima fronte videtur quam ſimpliciſſima, valde attamen et operoſa et taedii plena eſt, propter tarditatem operationis non minus quam propter empyreuma, quo acetum inficitur, copioſiſſimum.

§. 10. Vt viderem, poſſitne acetum glaciale obtineri, etiam ſi non niſi debile acetum deſtillatum ordinarium loco aceti concentrati adhibeatur, ſequens tentamen inſtitui.

## EXPER. II.

Libras 30 aceti ordinarii deſtillati admodum debilis ſuper duas carbonum pulueris libras e mariae balneo abſtraxi. Deſtillatione hac diffcillima aquoſum prorſus fluidum obtinui, nulla fere aciditate gaudens. Superſtes vero in retorta carbonum puluis e balneo arenae drachmas 12 largiebatur aceti cryſtalliſabilis puriſſimi 40 graduum, quod in frigore cryſtalliſatum aceti glacialis optimi 4 drachmas ſuppeditabat.

Hinc ſequitur, acetum glaciale etiam ſine praeuia aceti congelatione parari poſſe. Monendum tamen, praeviam aceti congelationem quam maximae eſſe vtilitatis, quia hoc modo maxima aquae copia antea ſeparatur, deinde quoque, quia per maiorem concentrationem et aceti volatilitas augetur; quo ipſo deſtillatio ſuper carbonum puluere inſigniter acceleratur.

§. 11. Supra iam dixi, acetum cryſtalliſabile ad ſpontaneam cryſtalliſationem frigus ad minimum 173 graduum poſtulare (§. 8. c.) Contigit tamen mihi encheireſin inuenire, qua acetum cryſtalliſabile frigore longe minori, 158 nempe graduum, ad cryſtalliſationem perducitur; pro quo tamen negotio acetum glaciale iam confectum ad manus ſit oportet.

## EXPER. III.

Elychnium tenue goſſypinum (cui, ſi placet, et filum quoddam ſubſtitui poteſt) aceto glaciali fortiori liquefacto immerſi, et hoc ad cryſtalliſandum diſpoſui, idque eo fine, vt cryſtal-

cryſtalli nonnullae aceti glacialis elychnii ei immerſi extremitati adhaererent; poſtea elychnium hoc, in vitro acetum cryſtalliſabile continente frigorique 158 graduum expoſito, ſuspendi ea ratione, vt elychnii extremitas cryſtallulis ei adhaerentibus onuſta aceti ſuperficiem tangeret, quo facto, cryſtalliſationis primordia iucundo oculis ſpectaculo ſine mora vidi; initio enim magna vis cryſtallulorum in ſuperficie oriri coepit, qui nivem mentiti fundum petebant; breui poſt cryſtallos radicatas diuergentes et ociſſime in longum creſcentes goſſypii extremitati, penicillorum ad inſtar, adhaerere vidi, ita, vt vnius horae ſpatio pulcerrima aceti noſtri cryſtalliſatio plane abſoluta fuerit.

Singularis et elegantis effectus huius cauſſa ex ea acidi aceti proprietate repetenda eſt, qua id alium cryſtalliſationis, liquefactionis alium temperiei gradum habet.

Duplex eſt encheireſis huius vtilitas, ſiquidem eius ope aceti cryſtalliſatio non minori ſolum frigore perficitur, ſed magnae etiam et regulares oriuntur cryſtalli, a quibus ſuperſtes muria facillime et ſine mora decantari poteſt. Adde quod debilius quoque acetum, ac ſupra (§. 3. n. 1.) nominaui, 24 nempe graduum, cryſtalliſationi encheireſis huius adminiculo aptum ſit, dummodo hoc in caſu frigus quam vehementiſſimum in auxilium vocetur.

§. 12. Tentaminum hucusque deſcriptorum omnium proſperrimus ſucceſſus non incitare me non potuit, vt, poſſitne acetum glaciale aliis adhuc parari modis, experirer; idque ideo imprimis, quod eum nunc cognouerim concentrationis gradum, quem acetum, vt certo frigoris gradui expoſitum in cryſtallos coire queat, poſtulat.

EX-

## EXPER. IV.

Die 18 Februarii anno 1789 e ſodae acetoſae ſicciſſimae vnciis 27, adiuuantibus 18 acidi vitrioli concentratiſſimi vnciis, methodo conſueta Cl. Weſtendorfii, alcoholis aceti fortitudinis 32 graduum vncias 13 deſtillatione elicui. Acetum hoc, frigori 174 graduum per noctem expoſitum, elychnio goſſipino, cui aceti glacialis cryſtalluli adhaerebant (Exper. III.) tactum, breui poſt tempore in pulchras prismaticas, nitri ad inſtar, cryſtallos concreuit pollices tres longas, ita, vt poſt noctem, frigore ad 182 vsque gradus aucto et decantata ſuperſtite parte liquida, vnica hac cryſtalliſatione drachmas 27 cum dimidia aceti glacialis obtinuerim. Muriam dictam a cryſtallis decantatam fortitudinis 24 graduum deſtillationi ſuper duabus pulueris carbonum libris e mariae balneo ſubieci. Acetum hac deſtillatione obtentum ſuauis puriſſimique erat odoris et 16 fortitudine graduum. E ſuperſtite vero carbonum puluere aceti cryſtalliſabilis valde ſulphurei 22½ drachmas ex arenae balneo obtinui: Acetum hoc cryſtalliſabile etiamſi fortitudinis erat nonniſi 36 graduum, frigore tamen 163 tantum graduum ſponte, aceti glacialis more, penitus fere in maſſam concreuit cryſtallinam.

§. 13. Cryſtalliſationis phoenomena huius aceti quod attinet; ea conſimilia prorſus ſunt iis aceti glacialis ope pulveris carbonum parati. Ex quo, mea quidem ſententia, videre eſt, acetum ſuo cum aliis corporibus connubio naturae ſuae mutationem ſubire nullam.

§. 14. Eo nunc cum perueniſſem, vt deſcriptis duabus, a ſe inuicem longe diuerſis, methodis (§. 7 et 12.) hyemali quidem tempore, facili negotio acetum glaciale pararem; nihil mihi magis in votis fuit, quam, vt talem explora-

plorarem viam, qua acidum aceti abſque frigoris adminiculo; quacunque anni tempeſtate, ad formam redigi cryſtallinam poſſet.

Media, quibus aceto per eius cum corporibus alcalinis terreisque et metallicis connubium partes aqueae adimi prorſus poſſunt, ſatis ſuperque nota ſunt, nec latent ea, quibus aceti acidum a corporibus dictis ſibi vnitis liberari queat. Primum inter haec locum procul dubio oleum vitrioli ſibi hucusque vindicauit. Enim vero acidum hoc quantumuis concentratum ſit, tamen aquae nonnihil fouet, qua aceti acidum ſub deſtillatione ſemper rurſus diluitur, et aceti quidem cryſtalliſabilis, neutiquam vero glacialis formam induit. Vt itaque acetum a corpore ſibi iuncto ſub glaciali forma ſegregetur; ſubſtantiae prorſus ſiccae adminiculo, qualis eſt ipſe ſal aceti, vt perficiatur ſeparatio, neceſſe eſt. Quae dum animo mecum perpenderem totusque eſſem in eo, vt aptum ſeparationis medium detegerem: dies 28 Februarii anni 1789 diuturni laboris optatiſſimum tandem finem attulit. Nonnullis nimirum abhinc iam annis in reſiduo quodam a liquore anodino Hoffmanni cryſtallos ſalinas ſingularis formae fortuitu inueneram. Salem hunc tartarum fuiſſe vitriolatum vitriolico acido ſuperſaturatum, examen chemicum me docuerat (chemiſche Annalen St. 10. S. 300).

Ea acidi vitriolici pars, qua alcali fixum vegetabile ſuperſaturatum eſt, ſali huic non ſicca tantum forma ſed adeo etiam leuiter adhaeret, vt via tam ſicca per candeſcentiam, quam humida, aliarum ſubſtantiarum abſorbentium adminiculo, ſeparatu a tartaro vitriolato facillima ſit. His omnibus ſpem concepi, fore, vt acidum vitriolicum ſuperuacaneum ſicca forma in hoc ſale latens medium ſeparationis aceti ſub glaciali forma aptiſſimum praebeat; qua ſpe adductus ſequentia tentamina inſtitui.

## EXPER. V.

Calcis acetatae grana 10, et tartari vitriolati ſuperſaturati totidem in mortario lapideo exactiſſime contrivi; durante tritura hac aceti odorem percipere nullum potui; ſtatim vero, ac pulueri huic ſicco aliquot aquae frigidae guttas admiſcuisſem, vehementiſſimus aceti odor oriebatur.

## EXPER. VI et VII.

Aequalem dictae mixtionis quantitatem (Exper. V.), forma pulueris ſicciſſimi, ſine aquae additione, vitro paruo immiſi, vitrumque, orificium ipſius digito claudens, flammae candelae oblique admoui; ſic breui tempore in vitri parte deorſum verſa duae vel tres liquoris guttae colligebantur, quas loco frigido expoſitas maxima cum voluptate mea acetum glaciale imitari obſeruaui.

Effectum aequalem vidi, cum calcis acetatae loco, ſodam acetoſam pari ratione cum tartaro vitriolato ſuperſaturato tractauiſſem.

§. 15. Antequam plura maiorique quantitate inſtituere experimenta potuerim; definita methodus tartarum vitriolatum ſuperſaturatum conficiendi inueſtiganda mihi erat. Miſſis omnibus hunc in finem a me ſuſceptis tentaminibus, non niſi eum procedendi modum, qui optimus eſſe mihi viſus eſt, hic exhibebo.

In cucurbita vitrea debitae capacitatis colloque longiori inſtructa partes 7 olei vitrioli cum aequali aquae purae quantitate commiſceantur. Mixtioni fervidiſſimae adhuc 4 alcali fixi vegetabilis depurati partes ingerantur, idque interuallis, quantum pro exoriente inde inſigni efferueſcentia fieri poteſt, breuiſſimis,

ne

ne refrigeratus liquor perfectae ſalis ſolutioni impedimentum afferat. Mixtis omnibus et frigeſcente ſolutione, tartarus vitriolatus ſuperſaturatus in pulchras magnasque cryſtallos coit rhomboidales, quae, omnibus probe refrigeratis, et decantato ſuperſtite liquore in ſimilem vſum aſſeruando, bis vel ter aqua frigida quam citiſſime abluantur, leuique calore ſiccatae in puluerem ſubtiliſſimum conterantur, denuo probe ſiccandum, quotiescunque in vſum fuerit reuocandus.

§. 16. Parata hoc modo ſatis larga huius ſalis copia, ipſa tentamina, acetum glaciale eius ope parandi, adgreſſus ſum.

## EXPER. VIII.

Debitam miſcendorum proportionem, cuius praeuia cognitione mihi potiſſimum opus erat, ſequenti ratione exploravi.

Sodae acetoſae grana 6 in cochleari argenteo candela calefacto parua aquae quantitate diſſolui; ſolutioni tantum quantum per euaporationem abierat aquae, ſubinde reddidi, eique iterum iterumque granum vnum tartari vitriolati ſuperſaturati admiſcui, donec quod vltimo admiſcuiſſem granum aceti odorem produxiſſet nullum; quo tentamine didici, tres partes ſodae acetoſae pro aceto plene expellendo quatuor ſalis noſtri acido vitriolico abundantis partes poſtulare.

§. 17. Poſtquam hac ratione proportionem miſcendorum via humida inueſtigaſſem; eandem ſicca quoque via per ſequentia tentamina explorare non praetermiſi.

EXPER. IX.

Sodae acetoſae ſicciſſimae drachmas 12; tartarique vitr. ſuperſaturati drachmas 16, ſeorſim in puluerem ſubtiliſſimum redactas probeque ſiccatas et commixtas, deſtillationi in arenae balneo ſubieci. Applicatis applicandis ignem ſubdidi vehementem, quo mixtio breui tempore liquefacta in pultem bullas magnas et ſpiſſas extrudentem abiit. Stillante deinceps liquore receptaculum bis mutaui. Finita deſtillatione, drachmas ſex cum duobus granis aceti glacialis, turbidi et flavo colore, odoreque admodum ingrato hepar ſulphuris olente praediti nactus ſum, cuius, quae media tranſiit adeoque concentratiſſima pars 50 graduum fortitudine pollebat. Reſiduum ſalinum maſſam duram, ſpongioſam illam et ex gryſeo nigricantem, ſiſtebat, cuius alcalinus ſapor impenſam tartari vitriolati ſuperſaturati quantitatem plenae 12 drachmarum ſodae acetoſae deſtructioni non ſuffeciſſe, remque aliter via ſicca ac humida ſe habere, indicauit.

EXPER. X.

Ex 12 Sodae acetoſae drachmis et 3 tartari vitr. ſuperſaturati vnciis, drachmas 7 et 40 grana aceti glacialis flavi coloris odorisque ſulphurei obtinui. Reſiduum ſalinum penitus quidem nigri coloris, ſaporis vero, quam ante, minus alcalini erat.

EXPER. XI.

Ex 12 Sodae acetoſae drachmis et 4 Tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis, drachmas 8 cum granis 5 aceti glacialis obtinui.

EXPER. XII.

Sodae acetoſae drachmae 12 cum 6 tart. vitr. ſuperſaturati vnciis commixtae, 8 drachmas et 14 grana aceti glacialis largiebantur.

Am-

Amborum horum vltimorum tentaminum euentus, praeter maiorem, quam largiebantur, aceti quantitatem, ab eo priorum experimentorum IX et X, in ſequentibus praecipue differebat:

a) Deſtillatio longe facilius ſucceſſit, dum gutta guttam ſingulis ſecundis ſecuta eſt.

b) Acetum obtentum non pellucitate tantum, ſed puritate quoque ac fortitudine erat maiori

c) Reſiduum ſalinum in ſuperficie quidem cinereum, in fundo vero albiſſimum referebat colorem.

d) Sapore idem gaudebat non alcalino ſed acido potius.

Praeterea miſcendorum proportionem quod attinet, ea, qua in Exper. XI. vſus ſum, omnibus mihi antecellere videtur, vbi ſodae acetoſae quantitas ad eam tartari vitriolati ſuperſaturati in ratione numerorum 3 et 8 fuit. Caeterum quae obtinetur hac methodo, tanta eſt aceti glacialis copia, vt mihi quidem admiranda videatur, ſiquidem 3 Sodae acetoſae partes 2 aceti noſtri partes largiuntur.

Experimentis his demum edoctus ſum, receptaculum, ſubſtrato iam igne et ineunte liquoris ſtillatione, prius adplicandum non eſſe, niſi expulſa iam humiditate; apparentes deinde in retortae roſtro ſtriae pingues, vaporesque albi, tranſeuntis ipſius aceti glacialis initium produnt. Ita quoque tranſiens in vltima deſtillatione liquoris pars vtpote reliqua longe debilior ſeorſim eſt excipienda.

§. 18. In omnibus tentaminibus paragrapho antecedente expoſitis, quia materiam citiſſime liquefieri huic nego-

 tio

tio neceſſarium duxi, ignem impendi vehementem. At vero, quod vtique maxima mea cum moleſtia expertus ſum, acetum admodum empyreumaticum ſulphureumque odorem inde nunquam non affecutum eſt. Inſtitutis vero compluribus poſtea periculis didici, operationem hanc leniſſimo etiam, et qui fundendae materiae prorſus impar eſt, caloris gradu ſuccedere, acetumque inde aquae ad inſtar limpidiſſimum, exiguo duntaxat odore heterogeneo praeditum eadem facilitate nec non celeritate prodire.

## EXPER. XIII.

Mixtio ſicciſſima, conſtans 18 vnciis ſodae acetoſae et 48 vnciis tartari vitriolati ſuperſaturati, deſtillatione igne leniſſimo peracta, vncias 11 cum drachmis 6 aceti glacialis fortitudinis 50 graduum ſuppeditauit, cuius periculi proſperrimus euentus, aceti glacialis praeparationem ſecundum methodum hanc largiori etiam quantitate ſuccedere, me edocuit.

§. 19. Cum ſalium in ſe inuicem augeatur actio, liquoris adminiculo ipſorum ſolutioni fauentis; tentamina ſupra deſcripta ſequenti ratione variari, e re mihi viſum eſt.

## EXPER. XIV.

Mixtioni 3 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis et 12 Sodae acetoſae drachmis conſtanti, in retortam immiſſae, drachmas 8 aceti glacialis fortitudinis 46 graduum in antecedentibus tentaminibus obtenti, admiſcui blandoque igne deſtillationem inſtitui; quo facto, 15 drachmas cum 49 granis aceti glacialis 48 graduum obtinui. Reſiduum ſalinum ſimile prorſus fuit ei experimenti X, vbi tres quoque tartari vitriolati ſuperſaturati vncias adhibui, nigri ſcilicet coloris.

EX-

## EXPER. XV.

E miſtione 4 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis, 12 Sodae acetoſae et 16 aceti glacialis drachmis conſtante, deſtillatione 24 drachmas cum 10 granis aceti glacialis obtinui. Reſiduum in ſuperficie album, in fundo vero nigricantem prae ſe ferebat colorem et acri linguam ſapore feriebat.

Duo haec pericula ſatis ſane comprobant, aceti glacialis nullam plane hac in operatione vtilitatem eſſe, acetum enim hac ratione obtentum nec qualitate neque etiam quantitate antecellere reperi.

§. 20. Cum in experimentis hucusque expoſitis non niſi eiusmodi obtinuiſſem acetum glaciale, cuius certe non erat ſumma fortitudo, id quod me quidem iudice ſuperſtiti in ſalibus aquae cryſtalliſationis debetur, tum quoque, vt explorarem, poſſitne acetum hoc orbum plane aqueis particulis a baſi ſua diuelli; tentamina ſequentia inſtitui.

## EXPER. XVI.

Vt omnem cryſtalliſationis aquam e tartaro vitriolato ſuperſaturato expellerem, 4 eius vncias fuſioni in tigillo debito igne expoſui; ceſſante deinde ebullitione, ſal hoc ſuper laminam metallicam effudi, eique poſt refrigerationem in pulverem ſubtiliſſimum redacto 12 drachmas ſodae acetoſae ſicciſſimae admiſcui. E puluere hoc 7 drachmas aceti glacialis 51 graduum deſtillatione euocaui.

Etiamſi hoc in tentamine acetum maiorem quam ante conſecutum eſt fortitudinem: methodus tamen ipſa votis non plane ſatisfacere mihi videbatur, quandoquidem tartarus vitriolatus

olatus ſuperſaturatus, poſt fuſionem ita vitri ad inſtar dureſcit, vt non niſi difficillime in puluerem redigi queat.

## EXPER. XVII.

Drachmas 26 ſodae acetoſae igne vehementiori liquefactas, in mortarium lapideum effuſas et in puluerem redactas, cum octo vnciis tartari vitriolati ſuperſaturati ſicciſſimi probe mixtas deſtillationi leniſſimo igne ſubieci; quo artificio 14 drachmas aceti glacialis 54 graduum laetabundus obtinui.

Vt nihil, quo aquoſae partes e ſalibus quorum tenaciſſimae ſunt, expellerentur, intentatum relinquerem: experimenta eadem ſequenti ratione variaui:

## EXPER. XVIII.

Sodae acetoſae drachmas 26 fuſioni diuturniori, et vehementiore igne, quam in praecedente experimento, expoſui, qua pondus eius iacturam 3 drachmarum paſſum eſt. Eodem tempore in patina figulina vncias 8 tartari vitriolati ſuperſaturati, continuo agitando eas bacillo vitreo, per integram horam tali expoſui igni, vt, quantum fieri potuit, absque liqueſcentia aqua cryſtalliſationis omni priuarentur. Hac calcinatione pondus ſalis huius iacturam 3 drachmarum paſſum eſt. Binis his ſalibus probe mixtis et retortae immiſſis, deſtillationem adgreſſus ſum. Initio igne leniſſimo 4 aceti glacialis limpidiſſimi drachmae 54 graduum tranſierunt: aucto autem deinceps igne 10 adhuc aceti flaui coloris, at contra opinionem meam 46 tantum graduum conſcentus ſum.

§. 21. Vt explorarem, qua ratione tart. vitr. ſuperſaturatus ad alia aceti ſalia ſe haberet, ſequentia experimenta inſtitui:

EX-

## EXPER. XIX.

Ex duodecim drachmis terrae foliatae tartari, debito igne fuſis et cum 4 tart. vitr. ſuperſaturati vnciis probe mixtis, deſtillatione blando igne drachmas 7 cum 21 granis aceti glacialis 52 graduum obtinui, odoris, quam id, quod ex ſoda acetoſa nactus ſum, certe purioris. Detrimentum vero duorum fortitudinis graduum ei ſine dubio terrae foliatae tartari tribuendum proprietati eſt, qua inſigni gaudet cum aëris aquoſis particulis affinitate; incommodum hoc, quod cum miſcentur ſalia locum obtinet, penitus tolli nulla arte poteſt, poteſt tamen imminui, maturando operationes, quibus ea in pulueres rediguntur, miſcentur et retortae immittuntur.

## EXPER. XX.

Sachari Saturni, aqua cryſtalliſationis orbati, drachmae 12 cum 4 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis mixtae, deſtillatione drachmas 5 aceti glacialis ſatis puri praebuerunt: at deſtillatio haec non niſi vehementi igne perfici potuit, neque tamen niſi lento paſſu proceſſit.

## EXPER. XXI.

Calcis acetatae drachmae 4 et tartari vitriolati ſuperſaturati vncia vna drachmas duas cum 45 granis aceti glacialis 44 graduum ſuppeditauerunt; quae methodus, licet minus ſumtuoſa ſit, id tamen incommodi habet, quod calcis acetatae perfecta ſiccatio valde ſit operoſa.

## EXPER. XXII.

Florum viridis aeris vncia $1\frac{1}{2}$ cum 4 tartari vitriolati ſuperſaturati vnciis mixtae 9 drachmas aceti cryſtalliſabilis 40 graduum ſuppeditauerunt.

## EXPER. XXIII.

Vnciae ſex florum viridis aeris in puluerem redactorum deſtillatione per ſe, 19 drachmas aceti radicalis ſic dicti largiebantur, quarum vltimae duae tantum nec niſi frigore 155 graduum cryſtallos formauerunt. Caeterum in aceto hoc coerulei coloris magna etiam vis cryſtallorum cupri acetati conſpiciebatur, hocque ipſum eſt acetum illud glaciale, quod Cl. Comes de Lauragais primus obſeruauit.

Hiſce factis, ſciendi cupidus, liceatne tartari vitriolati ſuperſaturati loco alia eodem fine ſubſtituere ſalia ſicca, ſequentia ſuſcepi pericula, eaque nominatim cum alumine, cremore tartari, acido puro tartari et mercurio ſublimato corroſiuo.

## EXPER. XXIV.

Vncia vna ſodae acetoſae cum duabus aluminis crudi vnciis probe mixta, deſtillando vnciam vnam aceti lacteſcentis admodum ſulphurei coloris largiebatur, cuius fortitudo non niſi 12 graduum erat.

## EXPER. XXV.

Sodae acetoſae vncia vna cum duabus aluminis vſti vnciis, deſtillatione drachmas duas cum 20 granis aceti 28 graduum flaui coloris et nauſeoſiſſimi odoris ſuppeditabat.

## EXPER. XXVI.

Ex aluminis moderato igne aqua cryſtalliſationis priuati vnciis 4 cum ſodae acetoſae igne liquatae 12 drachmis, 10 drachmas cum dimidia aceti 20 graduum, limpidi quidem ſed ingrati odoris conſecutus ſum.

Quae

Quae tria tentamina, aceti glacialis productioni ineptum omnino alumen eſſe, ſatis vtique demonſtrant.

## EXPER. XXVII.

Cryſtalli tartari et terra foliata tartari quantitate perquam exigua cum aliquot aquae guttis probe contritae, aceti odorem ſpirabant plane nullum; attamen mixtio in cochleari modice calefacta vehementiſſimo aceti odore ſtatim nares feriebat.

## EXPER. XXVIII.

Terrae foliatae tartari igne liquatae drachmis 12 cremorisque tartari vnciis 4, probe mixtis, deſtillationique ſubiectis, non niſi tanto igne, qui tartarum deſtruit, 6 drachmas aceti debilis valde empyreumatici fuſcique coloris obtinui.

## EXPER. XXIX.

Acidum tartari ſiccum et terra foliata tartari, quantitatibus exiguis probe contrita, adiectis miſtioni aliquot aquae guttis, fortiſſimum ſpirabant aceti odorem.

## EXPER. XXX.

Ex duarum terrae foliatae tartari igne liquatae, totidemque acidi tartari ſicci vnciarum mixtione deſtillationi ſubiecta vnciam vnam aceti 10 graduum valde empyreumatici fuſcique coloris obtinui.

## EXPER. XXXI.

Aceti a baſi ſua alcalina per acidum tartari ſeparationem fortaſſis acceſſu aquae faciliorem fore, dum ſuſpicarer, antecedens experimentum ſequenti modo variaui.

Drachmis 12 terrae foliatae tartari retortae immiſſis, vncias duas lixiuii acidi tartari, euaporatione ad cryſtalliſa-

 tionis

tionis fere punctum redacti, admiſcui; vbi quidem id notatu dignum mihi viſum eſt, quod mixtionis tempore inſignis materiae calor isque ſine vlla aceti expulſione, exoriretur. Postea, miſtione hac deſtillationi ſubmiſſa, vnciam vnam aceti debilis valde empyreumatici et fuſci coloris aſſecutus ſum.

Cremor ergo tartari acidumque eius purum, aeque ac alumen, aceti glacialis ſeparationi inſeruire plane non poſſunt.

## EXPER. XXXII.

Sodae acetoſae igne liquatae drachmae 12 cum mercurii ſublimati corroſiui vnciis tribus exactiſſime mixtae et deſtillationi igne mediocri ſubiectae drachmas 3 et grana 40 aceti glacialis 54 graduum, limpidi quidem eius ſed valde ingrati odoris ſuppeditabant, quod, vt liqueſceret, temperiem 127 graduum poſtulabat.

Obtenti hoc modo aceti non quantitas tantum exigua, ſed reſidui etiam puluerulenti color niger eiusdemque in aqua feruida ſolutio, quae praeter ſalis communis ſaporem linguae nihil prorſus metallici indicauit, ſatis comprobant, adhibitam mercurii ſublimati quantitatem perfectae aceti expulſioni non ſuffeciſſe.

Ex omnibus hiſce experimentis a paragrapho 16$^{to}$ hucvsque expoſitis, manifeſtum eſt, alcali vegetabile acido vitriolico ſuperſaturatum, et mercurium ſublimatum, aceto glaciali a baſi ſua ſeparando quam optime inſeruire. Caeterum, quodnam duorum horum laudatorum ſeparationis mediorum alteri palmam praeripiat, per ſe patet.

§. 23. Etſi nullum, vt aiunt, non moui lapidem, vt acido aceti ſummum fortitudinis gradum conciliarem: tamen

vltra

vltra gradum $54^{ium}$, nullo mihi hucusque artificio procedere licuit.

§. 24. Acetum glaciale debile 42 graduum duobus a ſe inuicem diuerſis modis ad ſummam, cuius acidum hoc capax eſſe videtur, fortitudinem reduci poteſt:

1.) rectificatione leni igne perficienda; vbi pars fortior inſequitur debiliorem.

2.) Cryſtalliſatione; vbi pars debilior formam liquidam conſeruans a parte ſolida cryſtallina longe fortiori decantatur.

Hyemali tempore concentratio haec quam optime obtinetur, ſi acetum glaciale debile, frigore in cryſtallos coactum, ad hypocauſti feneſtram ita collocetur, vt vitri latus vnum feneſtram immediate attingat; aeſtiuo autem tempore, vitrum acetum continens aquae cum glacie mixtae ad collum vsque immergendum, acidoque perfecte refrigerato alius aceti glacialis fortiſſimi in formam ſolidam ante iam coacti nonnihil addendum eſt; quo facto, acetum glaciale concentrandum ſuauiſſimo ſpectaculo breui tempore in pulchras magnasque concreſcit cryſtallos, quae, decantata parte liquida longe debiliore, fortiſſimum ſiſtunt acetum glaciale; quo iucundo procedendi modo aceto glaciali ſummus fortitudinis gradus conciliari quam facillime poteſt.

§. 25. Singulare id quoque eſt, quod acetum glaciale, quando ſupradictis artificiis (§. 24. n. 1 et 2.) ad 54 graduum fortitudinem perductum eſt, vlterioris eiusdem gradus capax nulla ratione eſſe videatur; tantum enim abeſt, vt acetum 54 graduum, ſi modo dictis concentrandi methodis

 vlte-

vlterius ſubmittitur, eo etiam fortius euadat, vt potius inſigniter debilitetur et particularum acidarum iacturam experiatur. Inde videre eſt, aceti acidum cum variis aliis acidis id commune habere, vt partes acidae aëris formam induant, quam primum omnibus particulis aqueis prorſus priuantur. Hinc ſingularis illa et copioſa bullularum apparitio, quae, incipiente aceti glacialis cryſtalliſatione, ſemper obſeruatur.

Hinc quoque in eiusmodi aceto glaciali 54 graduum, quoties ad cryſtalliſandum ex parte tantum diſponitur, pars liquida longe debilior deprehenditur, licet in parte cryſtalliſata nullum iam fortitudinis incrementum obſeruari poſſit.

Hiſce omnibus conſideratis, extra omnem dubitationis aleam poſitum eſſe videtur, acido aceti maiorem fortitudinem conciliari nullo modo poſſe. Vnde etiam fieri plane nequit, vt tale vnquam conſequamur acetum glaciale, quod formam ſuam cryſtallinam calidiori etiam aeſtiuo tempore conſeruare queat.

§. 26. Expoſitis hucusque variis acetum glaciale parandi methodis; ſupereſt vt earum praeſtantiores hoc paragrapho ſeparatim exhibeam, et quibus ſingulae vel commodis praecellant vel premantur defectibus, exponam.

Tres ſunt huiusmodi methodi, quae me quidem iudice optimae videntur, et nominatim quidem:

1.) praeparatio aceti glacialis mediante carbonum puluere (§. 7.);

2.) praeparatio eiusdem ex alcohole aceti fortiſſimo Westendorfii (§. 12. Exp. 4.);

3.) denique iſta methodus, qua acetum ex ſoda acetoſa vel terra foliata tartari adiuuante tartaro vitriolato ſuperſaturato immediate ſub glaciali forma ſegregatur (Exp. XIII. XVII et XIX.).

Primam quod attinet methodum, ob repetendas iterum iterumque ſuper carbonum puluere aceti abſtractiones, multum illa quidem temporis requirit et laboris, at obtentum hac ratione acetum glaciale tanta gaudet ſuauitate et perfectiſſima puritate, vt caeteris hoc intuitu longe ſit praeferendum.

Secundam quod attinet et tertiam; vtraque longe eſt, quam prima, facilior; attamen inficias ire non licet, acetum glaciale inde reſultans ea, qua iſtud prioris methodi, ſuauitate non gaudere.

Binarum harum methodorum vtra antecellat alteri, ſupereſt vt diſpiciamus. Prima quidem fronte, ea qua acetum Weſtendorfii in vſum vocatur, facillima eſſe videtur, quia ad acetum ex ſoda acetoſa expellendum immediate vnicum acidum vitriolicum adhibetur. At omnibus probe perpenſis, tertia, quae tartaro vitriolato ſuperſaturato vtitur, palmam ſibi iure vendicare videtur, idque ob ſequentes rationes:

1.) In aceti Weſtendorfiani praeparatione iuſtam, quae ad plenariam aceti e ſoda acetoſa expulſionem requireretur, acidi vitriolici quantitatem addere non licet; quia, quantitate ſi peccetur, aceti alcohol acido vitriolico ſulphureoque admodum inquinaretur.

Si contra mediante tartaro vitriolato ſuperſaturato expellitur aceti acidum; absque vllo noxae periculo tanta

tanta ſalis huius copia adhiberi poteſt, quanta haerenti in ſale acetoſo acidi quantitati perfecte liberandae par eſt, immo adeo iuſto maior etiamſi fuerit, nihil inde detrimenti pertimeſcendum eſt. Acidum vitrioli in ſale hoc abundans ei tam arcte adhaeret, vt ex eo vaſibus clauſis per ſe immiſſo, igne non niſi vehementiſſimo expelli poſſit.

2.) Acidum vitrioli concentratiſſimum quamuis cautiſſime adfundatur ſali acetoſo probe ſiccato; aequalis, quae magni hoc in negotio eſt momenti, ingredientium commiſtio et mutua in ſe inuicem actio obtineri nequit. Prorſus vero aliter res ſe habet, vbi olei vitrioli loco, tartarus vitriolatus ſuperſaturatus adhibetur; nunc enim, vti oportet, miſcenda conteri in mortario pro lubitu poſſunt.

3.) Acidi vitrioli cum ſale acetoſo commiſtio, licet cautisſime inſtituatur, vehementiſſimam tamen ſemper producit incaleſcentiam, qua ſalis acetoſi aliquantulum comburitur non tantum, ſed aceti etiam pars vaporum ſub forma in auras abit; a quibus vitiis altera methodus, quoniam miſcenda non niſi accedente igne in ſe inuicem agunt, prorſus libera eſt.

4.) Cl. Weſtendorfii methodo impediri non poteſt, quominus reſultans ex ea acetum acido vitriolico ſulphureoque inquinetur: id quod mea methodo, ſi modo iuſtum fuerit ignis moderamen, neutiquam pertimeſcendum eſt.

5.) Adiuvante oleo vitrioli fortiſſimo, ex ſodae acetoſae vnciis 24 non niſi duodecim alcoholis aceti 32 graduum

duum obtinentur vnciae, quae vehementi demum frigori expoſitae ad ſummum 6 aceti glacialis vncias cryſtalliſatione largiuntur. Tartari vero vitriolati ſuperſaturati adminiculo ex eadem ſodae acetoſae igne fuſae quantitate 16 fere aceti glacialis 54 graduum obtinentur, vbi igitur duplex, et mira vtique, vtriusque methodi differentia cernitur.

6.) Ex aceto Weſtendorfiano, hiemali eoque vehemente frigore opus eſt, vt acetum obtineatur glaciale, quod noſtra poſteriori methodo quacunque aëris temperie parari poteſt.

Tartari vitriolati ſuperſaturati pretium ſi quis obiicere hic velit; moneri hic non erit alienum, ſal hoc minori quoque ſumtu e variis reſiduis pharmaceuticis parari poſſe v. g. ſi olei vitrioli loco reſiduum a deſtillatione liquoris anodini, et loco ſalis tartari ſuperſtes poſt depurationem cinerum clavellatorum tartarus vitriolatus adhibeatur: quid quod, ipſum aceti glacialis in retorta ſuperſtes reſiduum ſalinum denuo in tartarum vitriolatum ſuperſaturatum novae operationi aptum facillime conuerti poteſt, dummodo, ſoluto eo in aqua, nova ei addatur olei vitrioli portio.

Quibus omnibus perpenſis, vltimam hanc methodum meam, ſi quis aceti glacialis quantitatem magnam breuiſſimo tempore parare velit, priori antecellere manifeſtum eſt.

Per methodum hanc aceti vini crudi librae 300 aceti glacialis libras 7 largiuntur. Ex 5 aceti deſtillati 5 graduum libris 6 horarum labore duas obtinui aceti glacialis vncias.

Minorem denique odoris huius aceti ſuauitatem quod attinet; corri i plane vitium hoc idque duplici modo poteſt, vel abſtrahendo acetum ſuper carbonum puluere, vel, quod praeſtat, ſaepius iteraudis recryſtalliſationibus, qua methodo principium iſtud raphanum propemodum olens in remanente parte liquida ſuperſtes ab aceto glaciali feliciſſime ſeparatur.

# DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

## Diſſertatio X.

## DE STRATO SECVNDO FIBRARVM VENTRICVLI SINISTRI.

## PARS II.

Auctore
*C. F. WOLFF.*

*Conuent. exhib. die 27 Octobr. 1791.*

### *Quatuor fibrarum ſtrati ſecundi ordines.*

Fibrarum ſtrati ſecundi diſpoſitionem, analogiam earum cum fibris externis, et differentiam ab iisdem, deinde ortum fibrarum huius ſtrati, earum progreſſum et directionem, denique inſertionem in vniuerſum, et quae porro ab his pendent, in prima parte huius diſſertationis expoſui. Reliqua quaedam ſunt de his fibris in vniuerſum dicenda, quae nunc addam. Vti generatim ſingularis et mira analogia inter externum et ſecundum ſtratum, ſicuti et inter caetera, quae porro ſequuntur, intercedit; diuiſio etiam fibrarum ſtrati ſecundi perquam ſimilis eſt externarum fibrarum diuiſioni. Pariter illae

atque externae in quatuor ordines, idque ſimili et analoga ratione, diſtribuuntur. Memorabile eſſe videtur, omnino et penitus diuerſum in ea re fuiſſe ventriculum dextrum. Huius ſtratum externum in varios numeroſos, figura, ſitu, magnitudine, diuerſos, muſculos diuiſum erat. Numeroſiores etiam longe, magisque figura et ſitu diuerſas, et maximam partem minutiores, portiones muſculares in ſtrato ſecundo inuenimus, quibus hoc aegre quaſi conflatum eſſet. Simpliciſſima contra diuiſio fuit fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri in quatuor illos ordines, quos ex ipſa ventriculi figura et fabrica enatos eſſe facile intellexeris. Atque ſimili prorſus modo ſecundi quoque ſtrati fibrae dispeſcuntur. Ordo primus eſt earum fibrarum, quae in inferiori ſuperficie ventriculi a filo oriuntur cartilagineo poſteriori ſiniſtro *a*) et in ſtriae partem poſteriorem, *b*) quae peculiaris et diſtincta eſt a caeteris eius partibus, inſeruntur. Ordo ſecundus funiculis conſtat, inſignibus maxime in inferiori ventriculi ſuperficie, ortis a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro, *c*) a baſi aortae *d*) et ab ea ſede, quam columna triangularis in ſtrato externo occupat, *e*) inſertis in partem fere mediam ſtriae, *f*) quae pariter et a poſteriori ſtriae parte et ab anteriori ſua ſtructura ſe diſtinguit. Tertius ordo eſt fibrarum, quae, ortae a crena ad regionem radiatam vsque, *g*) latam faſciam efficiendo, *h*) circa marginem

---

*a*) Tab. IX. l. m. n.

*b*) Tab. IX. l. c. o.

*c*) Tab. VII. G. H.

*d*) Tab. VII. G. B.

*e*) Tab. VII. B. E.

*f*) Tab. IX. p. x. s. q. 2. 3.

*g*) Tab. VII. E. 36. 37 38.

*h*) Tab. VII. 28. 39.

nem ventriculi flectuntur, et ſub ordinis ſecundi funiculos partim ſe recipiunt, *a*) partim in ſtriae portionem anteriorem, diſtinctam ab eius parte media, inſeruntur. *b*) In his nimium ſe diſtinguunt in hoc corde, quas interpoſitas vocare poſſes, quae ortae in ſuperiori ſuperficie flabellatim fere ex ſequentibus huius ordinis fibris, vel ex interſtitio inter eas et funiculos ordinis ſecundi *c*) ſub eosdem funiculos in inferiori ſuperficie ſe recipiunt. *d*) Niſi omnino conſtantes ſunt interpoſitae iſtae, veſtigia tamen earum in plurimis cordibus reperiuntur. Denique quartus fibrarum ordo ab vltima parte crenae, a regione eius radiata et a duobus faſciculis terminalibus, ſuperiori et medio, oritur, *e*) et totus ſe ſub ordinem praecedentem recipit, *f*) excepta exigua parte, *g*) qua ad ſtriam pertingit.

*Harum analogia cum ordinibus fibrarum ſtrati externi.*

Adeo hi ordines analogi ſunt ordinibus ſtrati externi, vt ortum plane eundem a partibus iisdem, progreſſum fibrarum inſertionemque mire ſimiles ſinguli vtriusque ſtrati ordines inter ſe habeant. Ordo primus in ſtrato vtroque a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro oritur *h*); ſed fibris obliquis, longitudinali ductui propioribus, ea ratione progreditur in externo, vt totam ad principium faſciculi terminalis inferioris

 vsque

*a*) Tab. IX. x. 4. z. 6.

*b*) Tab. IX. 10. 15. 12. 15.

*c*) Tab. VII. E. 28. 32.

*d*) Tab. IX. x. 4. z.

*e*) Tab. VII. 41. 42. 44. 47. 50.

*f*) Tab. VII. 41. 42. 43. 40. Tab. IX. 11. 16. 17.

*g*) Tab. IX. 18.

*h*) Tab. IX. l. m. n. Tab. VI. y. 9.

vsque ſtriam inſertione ſua occupet; *a*) ductui propioribus contra transuerſo ita in ſecundo procedit ſtrato, vt partem tertiam tantum poſteriorem ſtriae fibris ſuis inſertis recipiat, *b*) proinde muſculum longe minorem, ſed ſimilem, in hoc ſtrato ſecundo efficiat. Sic ordo ſecundus a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro baſique aortae in vtroque ſtrato oritur; *c*) fibris autem, longitudinali ductui propinquis, apicem verſus in ſtrato externo decurrit, in faſciculumque terminalem inferiorem ſe inſerit; *d*) dum ductui propioribus transuerſo contra in ſtrato ſecundo ad mediam partem ſtriae pertingit in eamque inſeritur; *e*) muſculum pariter ſimilem in vtroque, minorem tamen in ſecundo quam in externo ſtrato efficiendo. Tertius ordo a pontis regione in ſtrato vtroque oritur. *f*) Fibris, ad marginem maxime in ductum longitudinalem curvatis, apicem verſus deſcendit in ſtrato externo, in eumque inſeritur. *g*) Transuerſis contra, marginemque tranſeuntibus, in ſecundo ſtrato ad ſtriam *h*) peruenit, in eamque ſe inſerit. Quartus denique a radiata crenae regione et a faſciculis terminalibus in ſtrato vtroque ortus *i*) in vtroque ſub praecedentem ordinem ſe recipit, *k*) atque inſertione igitur non minus quam ortu ſibi ſimilis eſt.

*Funi-*

---

*a*) Tab. VI. y. 9 10. 11. 12.
*b*) Tab. IX. l. m, n. c. o. s.
*c*) Tab. IV. Q. p. 51. 60. 65 67. Tab. VII. H. G. B. E.
*d*) Teb, VI. 13. 23. 52. 75.
*e*) Tab. IX. p. x. q. 3.
*f*) Tab. IV. 73. 79. Tab. VII. f. 36. 37.
*g*) Tab. IV. 77. 82. 105.
*h*) Tab. VII. 28 39. Tab. IX. x. 11. 10. 15.
*i*) Tab. IV. 84. 98 99. Tab. VII. 41. 44. 50.
*k*) Tab. IV. 92. 91, 97. 98, Tab. VII. 41. 43. Tab. IX. 16. 17.

### *Funiculi procurrentes in ſtrato ſecundo.*

Qui tamen funiculi in ſtrato ſecundo analogi ſunt procurrentibus funiculis ſtrati externi, qui ad ſequentes, quorum fibras colligebant, ordines in hoc externo ſtrato referebantur, ii ad praecedentes potius ordines in ſtrato ſecundo, ſub quos fibrae ordinum ſequentium ſe reciperent, referendi eſſe videntur. Sic vltimus funiculorum ordinis ſecundi *a*) nihil habet, quo ſe a praecedentibus *b*) huius ordinis funiculis diſtingueret. Neque ſe inſerunt in eum fibrae ſequentes ordinis tertii, *c*) qui ad eum terminari videntur; quin certum potius eſt, eas ſe recipere ſub funiculos ordinis ſecundi, ſub iisque ad ſtriam continuare. Qui procurrentem brevem in ſtrato ſecundo refert, funiculus craſſus omnino et inſignis eſt, *d*) etiamſi in inferiori ventriculi ſuperficie in planiorem faſciam ſe diſpergat. *e*) Sed fibrae ordinis quarti, quin ſe recipiant ſub eum, quin porro ſub caeteras tertii ordinis fibras ſe extendant, nullum prorſus dubium eſt. Videtur ergo et hic faſciculus ad tertium potius quam ad quartum ordinem fibrarum referendus eſſe. Atque idem, ni fallor, de ipſis procurrentibus funiculis externi ſtrati monendum quoque erit, vt maior ſcilicet ad ordinem potius ſecundum, minor ad tertium, referatur. Inſeri minime in illum fibras ordinis tertii, in hunc quarti, certiſſimum eſt, et monitum iam in ſuperioribus. Verum haud longe a procurrentibus fibras, quae ſub illos ſe recipiunt, excurrere, vel inde iam patet, quod, vbi prope ad eos

---

*a*) Tab VII. e. 28, Tab. IX. x. z.

*b*) Tab. VII. 26. 27. Tab. IX. w. t. p.

*c*) Tab. IX. x. 4. z.

*d*) Tab. VII. 38. 39.

*e*) Tab. IX. 11. 12. 15.

eos accedunt, *a*) ita iam curuantur, vt eundem fere cum procurrentibus ductum ſub iis continuent. Aliter in ſtrato ſecundo, imprimis ad procurrentem breuem ſe res habet, vbi ex directione fibrarum, dum ſe ſub illos recipiunt, *b*) cognoscas, quo magis ſub iis continuent, eo magis diſcedere ab iisdem. Caeterum ſiue ad praecedentes ordines procurrentes referas funiculos, quorum ſint fibrae vltimae, ſiue ad ſequentes, quorum primas efficerent fibras; notabiles tamen funiculi erunt, quibus ordines diuerſi manifeſto a ſe mutuo diſtinguuntur, et qui procurrentes ſequentium fibrarum reſpectu vocari merentur.

### *Striae, ſedis inſertionis, conditio in ſtrato ſecundo.*

Stria, ſedes inſertionis, in tres partes diuerſas, remoto externo ſtrato, in hoc quidem corde, in aliis, vbi apices ventriculorum minus ſeparati erant, in quatuor diuiſa fuit. Earum prima *c*) ad baſin ſita eſt. In hac fibrae ventriculi ſiniſtri cum fibris dextri ventriculi fere concurrunt. In aliis cordibus illae in has plane continuabant. Alia pars media eſt. *d*) In ea fibrae ventriculi ſiniſtri longius a dextris remotae, demergunt ſe citius in ſtriam et continuant in fibras ſepti, vt interſtitium ſatis largum in hac media parte ſtriae inter ambos ventriculos in ſecundo hoc ſtrato appareat. Tertia ſtriae pars *e*) eadem eſt, ſuper quam in ſtrato externo fifibrae ventriculi ſiniſtri in dextrum ventriculum tranſeunt,

*a*)

---

*a*) Tab. IV. 77. 78. 82. 91. 93. 94.

*b*) Tab. VII. 42. 43. Tab. IX. 16. 17. x, 4.

*c*) Tab. IX. a. c d.

*d*) Tab. IX. d. e.

*e*) Tab. IX. e. f.

*a*) eius in fibras continuatae. In ea pariter fibrae ventriculi ſiniſtri cum dextri fibris fere concurrunt in ſtrato ſecundo; et in aliis cordibus etiam in hoc ſecundo pariter atque in externo ſtrato ex ſiniſtro in dextrum ventriculum fibras tranſire vidi. Vt in hac atque in illa prope baſin ſede arctius omnino ventriculi, quam in media parte coniungantur. Denique quarta pars in aliis cordibus fuit, quae eadem cum hac eſſe videtur, qua ventriculi in hoc corde ſeparati exiſtunt, *b*) inſignes apices diſtinctos formando. Haec nullis ex ſiniſtro in dextrum ventriculum transeuntibus fibris in cordibus illis tegebatur, faciliusque in ea ſede, pariter ac in media ſtriae parte, ventriculi a ſe mutuo ſeparari poterant. Videtur ergo haec pars ſtriae eſſe ſingularis, qua conſtanter ventriculi minus arcte, quam in parte praecedenti et in prima, baſi propiori, parte coniunguntur. Vt eo minus ergo mirum ſit, ſi, velut in hoc corde, apices ventriculorum prorſus a ſe mutuo ſeparati inueniuntur.

An hoc naturae inſtitutum, vt in ſingulas has ſtriae partes ſinguli ordines fibrarum inſerantur? Vt partem ſuperiorem, ſeu poſteriorem, quam tranſire fibrae ſolent, ordo primus, mediam, qua in ſeptum illae ſe demergunt, ſecundus, inferiorem denique tertius occupet ordo fibrarum, quartus ſe recipiat ſub tertium? Nihil certi hactenus video. Et quae in caeteris cordibus obſeruaui conſentire potius cum huius cordis ſtructura viſa ſunt. Non totam ſuperiorem ſeu poſteriorem partem ſtriae primus ordo occupare ſua inſertione videbatur,

---

*a*) Tab VI. 44. 45. 46. 12.
*b*) Tab. VI. 12. 7. 100. Tab. IX. f. 20. 74.

batur, et partim in hanc ſuperiorem, partim in mediam, ſtriae partem ſecundus ordo fibrarum in iis, quae picta habeo, cordibus inſertus fuit. Sic mediae partis anteriorem portionem et aliquam pariter portionem partis anterioris ſtriae tertius ordo in plurimis cordibus tenuit, et quartus ordo his paucis, quae ad ſtriam peruenerant, fibris reliquam huius partis anterioris ſtriae portionem occupauit. Maximam enim partem ſub tertium is quartus ordo conſtanter ſe recipit.

*Ordo primus fibrarum in ſtrato ſecundo.*
*(Tab. IX. l. m. n. o. c. l.).*

Ergo a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro et a dimidio interſtitio inter bina fila ſiniſtra *a*) primus ordo fibrarum oritur. Sola ea pars fili, qua ex trunco filorum originem ducit, quam ſuo ortu faſcicnlus ſtriae occupat, excepta eſt. *b*) Reliqua tota ordini ortui inſeruit. At ſtriae vero faſciculus latitudine et magnitudine in variis cordibus variat, maioremque in aliis fili partem occupat, in aliis, velut in hoc corde, minorem. Proinde et ordo fibrarum a maiori nunc fili parte, nunc a minori, oritur. Sic ortus fibris, quaſi in faſciculos collectis *c*) craſſiores latioresque, ea directione oblique verſus poſtremam partem ſtriae, quam faſciculus ſtriae occupat, *d*) progreditur, vt multo propior ſit transuerſali quam longitudinali ductui. Imprimis vbi ex filo oriuntur faſciculi adeo transuerſim ferri incipiunt, vt fere prallelae ſint filo, angulisque ex eo oriantur acutiſſimis. *e*) Deinde in medio

*a*) Tab. IX. l. m n.
*b*) Tab. IX. a. l.
*c*) Tab. IX. m.
*d*) Tab. IX. l. c.
*e*) Tab. IX. m. n.

dio itinere, quaſi inflexae fibrae apicem verſus, eundem tamen continuo recipiunt ductum, transuerſo propinquum, eoque ad ſolam illam, quam faſciculus ſtriae occupat, ſtriae exiguam partem continuant, ſub eaque radiatim concurrunt, *a*) alia, quam continuo dicam, muſculi portione reliquam ſedis inſertionis partem occupante. Aliter ergo ſe habent fibrae ordinis primi in ſtrato externo, quae ortae a filo cartilagineo eodem *b*) adeo oblique progrediuntur, vt totam ſtriam ad extremitatem vsque ſua inſertione occupent, *c*) muſculumque ſic efficiant longe maiorem. Ad muſculum ſtriae vbi peruenerunt diuerſi faſciculi, quos fibrae ordinis primi efficiunt, extremitatibus tenuioribus in anguſtius ſpatium coerciti ad finem muſculi ſtriae inſeruntur. *d*) Vt vnus alterue faſciculorum huic muſculo ipſi ſe adiungat, caeteri omnes prope finem eius, vbi ad dextrum ventriculum ſe flectit, in ſtriam inſerantur. Tum alia vero in hoc corde portio huius musculi datur, *e*) emergens ex interſtitio inter priorem portionem *f*) et funiculos ordinis ſecundi. *g*) Haec ſub dictis fibris a media inter bina fila ſiniſtra parte oriri videtur. Inſeritur iuxta portionem priorem in partem ſtriae ſequentem. *h*) Vt totus hic ordo maiorem omnino portionem poſterioris partis ſtriae, haud totam tamen hanc partem, ſua inſertione occupet. Non conſtans haec portio eſt; quin plerumque hae

 fibrae

*a*) Tab. IX. c.

*b*) Tab. VI. y. F. 9.

*c*) Tab. VI. 9. 10. 11. 12. y.

*d*) Tab. IX. c.

*e*) Tab. IX. o.

*f*) Tab. IX. m. n. c.

*g*) Tab. IX. n. r. s.

*h*) Tab. IX. c. c.

fibrae extremae ordinis primi parallelae prioribus, ortae ab interſtitio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra, nec tectae funiculis ordinis ſecundi, ad ſtriam vsque decurrunt in eamque inſeruntur. Ortas etiam hoc modo ab interſtitio inter fila ſiniſtra progredi, et ſub priores huius ordinis fibras, a media fili parte ortas, ſe recipere, in aliquo corde vidi.

*Varietas ordinis primi fibrarum.*

Caeterum ſatis conſtans hic muſculus eſt, quem facile vbique et primo aſpectu a caeteris ſtrati fibris diſtinguas. Directionem hanc ſingularem fibrarum, qua parallelae fere filo ipſi, et ſub angulis acutiſſimis, ab illo oriuntur, qua apicem verſus deinde paululum flexae, mox tamen in ductum eundem, transuerſo propinquum redeunt, faſciculos porro latiores, in quos fibrae collectae ſunt, et figuram denique illam, quaſi ventricoſam, vbique fere reperi: Vna tamen varietas eſt, quae frequentius fere, quam haec deſcripta ſtructura ipſa occurrere videtur, adeo, vt in duas quaſi ſpecies fabricam fibrarum ordinis primi diſtinguere liceat, quarum altera eam, quae in hoc corde exſtat altera hanc, quam continuo dicam, muſculi huius conditionem, referat. Nimirum ſimili modo fibrae huius ordinis a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro ortae directione eadem ſimilique prorſus ductu ad ſedem inſertionis vsque progreſſae, ſimilem figura efficiendo muſculum, non in partem hanc ſtriae poſteriorem inſeruntur, ſed plane continuant in faſcias ſtrati ſecundi ventriculi dextri, vt vnum omnino cum his faſciis muſculum efficiant. Dum ſic fibrae in dextrum ventriculum tranſeunt, adiungunt ſe fibris muſculi ſtriae, pariter in dextrum ventriculum excurrentibus, ductuque conformi cum his progrediuntur; vt peculiaris modo portio faſciculus ſtriae muſculi eius quem tranſeuntes fibrae ordinis primi efficiunt, eſſe videatur. Vti faſciculus ſtriae in mar-

marginalem faſciam ventriculi dextri continuare ſolet; fibrae ordinis primi in ſecundam tertiamque abeunt angularem. Et vidi, ipſam ventralem faſciam primam ex his primi ordinis fibris in aliquo corde productam fuiſſe. Quae hac ratione ex ſiniſtro in dextrum ventriculum tranſeunt fibrae omnes ſimul ſumtae totam conſtanter occupant partem poſtremam ſtriae. Si ſolae ergo, quod plerumque fieri ſolet, ordinis primi fibrae tranſeunt; hae certe totam ſtriae poſteriorem partem continuatione ſua tegunt, fibraeque ordinis ſecundi in ſolam mediam inſeruntur. Sed accidit quoque, vt aliqua fibrarum ordinis ſecundi portio vna cum primi fibris tranſeat, quae in primam tunc faſciam ventralem ventriculi dextri continuare ſolet. Tum ſicut in hoc corde haud ſolae primi ordinis fibrae ſed portio ſecundi quoque partem ſtriae poſteriorem replent teguntque. Egregiam caeterum, magnam, latamque, transuerſalem faſciam hae fibrae, ſi in dextrum ventriculum continuant, ad inferiorem ſuperficiem cordis efficiunt, cuius latitudinem totam prope baſin transuerſim percurrunt, anguſtiorem in cordibus nonnullis ad ventriculum ſiniſtrum, latiorem ad dextrum, in aliis vtrinque aequalem, in media potius parte latiorem, ductu imprimis eleganti fibrarum inſignem.

*Ordo fibrarum ſecundus*

(*Tab. VII. G. E. H.* 28. *Tab. IX. p. x. s. q.* 1. 2. 3.) *Ortus.*

Ordo ſecundus, ſeu funiculorum, in ſtrato ſecundo a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro *a*) et ab interſtitio inter hoc filum et poſterius ſiniſtrum, maxime tamen a parte ſiniſtra baſis aortae *b*) et a ſede columnae triangularis ad principium crenae



*a*) Tab. VII. H. G.

*b*) Tab. VIII. a.

crenae vsque *a*) originem ducit. A filo ipſo eiusque et poſterioris interſtitio paucae quidem fibrae oriuntur, cum parallelae fere huic filo angulisque acutiſſimis et oriantur progredianturque. Tamen etiam magis aliquantum oblique deſcendere has fibras in aliquo corde vidi, atque in eo ergo copioſiores quoque ab hoc filo fibrae oriebantur. Conſtantior tamen et ſolita potius haec ſtructura eſt, quae in hoc corde obſeruatur, qua parallelae fere filo fibrae filum vix tangunt. Longe maxima pars fibrarum ea eſt, quae a baſi aortae, a latere eius ſiniſtro, oritur, *b*) ex quo ſub angulis fere rectis fibrae prodeunt, totamque gibboſam partem ventriculi tegunt. *c*) Quae a ſede columnae triangularis in conſpectum fibrae veniunt, *d*) uon ab hac columna oriuntur, ſed continuantur ab ea ſepti parte, cui conus arterioſus dexterius incumbit, quam ſiniſterius columna tegit triangularis et foſſa triangularis. His partibus ergo teguntur, quae ſepti hactenus fibrae ſunt, quae nunc ad marginem columnae ſiniſtrum in conſpectum veniunt, fibras efficiendo ventriculi ſiniſtri.

*Progreſſus et inſertio.*

Ex his ſedibus transuerſim fibrae, aut vix tamen a transuerſali ductu diuerſae, et parallelae fere filo cartilagineo anteriori ductumque huius fili proprium imitando, ad marginem vsque ventriculi progrediuntur, totamque eius partem poſteriorem ad baſin, principio crenae et fili radice incluſam, partemque gibboſam ventriculi, occupant. *e*) Quamuis etiam

*a*) Tab. VIII. c. i.
*b*) Tab VII. G. B.
*c*) Tab. VII. H. 26.
*d*) Tab. VII. B. E. 26. 28.
*e*) Tab. VII. G. E. H. 28.

etiam in aliquo corde magis oblique deſcendere has fibras obſeruauerim; ſolita tamen haec directio, hic progreſſus, hic ductus eſt fibrarum, qui in icone adiecto repraeſentatur, vt etiam primo intuitu has fibras, quamuis, in quo ſtrato exiſterent, ignoraretur, cognoſcere et a quibusuis caeteris fibris cordis diſtinguere liceret. In duas quaſi portiones ad ſuperiorem ſuperficiem in hoc corde quidem diſtinguuntur, quarum altera, poſterior et maior, *a*) a baſi aortae, altera, minor, *b*) a ſede columnae triangularis, oritur. Vbi ſuper marginem in inferiorem ſuperficiem tranſeunt, maiores craſſioresque funiculos efficiunt, et directionem ſimul inſigniter mutant. *c*) Solidiores omnino fortioresque fibrae ſunt, dum per ſuperiorem ſuperficiem ventriculi progrediuntur, haud adeo manifeſto tamen diſtinctos craſſitie funiculos quam in hac in feriori ſuperficie efficiunt. Videntur ergo fibrae ſimplices quidem, quamuis fortiores, a ſede ortus oriri, et progredi ſimplices per vniuerſam ſuperiorem ſuperficiem, tum colligi vero in craſſiores hos funiculos, qui in inferiori ſuperficie obſeruantur. In ipſo margine quoque ventriculi ita ſimul flectuntur, vt, quae transuerſae hactenus in ſuperiori ſuperficie fibrae fuerant, oblique deſcendentes in inferiori appareant funiculi. Hi angulos ſemirectos quaſi vtrinque, cum filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro pariter *d*) atque cum margine ventriculi, *e*) includendo per inferiorem hanc ſuperficiem decurrunt, mediamque ſtriae partem verſus properant. *f*) Dimidio ta-

*a*) Tab. VII. G. B. H.

*b*) Tab. VII. C. E. 26.

*c*) Tab. IX. p. x. 5. 3.

*d*) Tab. IX. l. m. n.

*e*) Tab. IX. x. 11.

*f*) Tab. IX. x. z.

tamen itinere ſuperato iterum flectuntur, et in ductum denuo redeunt, transuerſo propinquum. *a*) Sic in ſtriae partem mediam et in aliquam ſuperioris partis portionem inſeruntur. *b*) Vbi primum ſuper marginem ventriculi tranſeunt, in inferiorique ſuperficie apparent, in duas portiones diuiſae, in hoc quidem corde, progrediuuntur. Earumque, quae propior baſi ventriculi, prior portio *c*) in ſuperiorem ſepti partem inſeritur. *d*) Altera, ſecunda, *e*) mediam fere, haud totam tamen, ſepti partem ſua inſertione occupat. *f*) Diſtinctae in hoc corde portiones ſunt ſingulari modo, dum funiculi quidam ſub alios ſe recipiunt. Dum funiculi per inferiorem ventriculi ſuperficiem verſus ſedem ſuam inſertionis progrediuntur; primae fibrae ordinis ſequentis ſub extremum funiculum ſe recipiunt, *g*) hic ipſe porro funiculus ſe ſub praecedentem ſibi recipit, *h*) et iſte porro ſub eum, qui huic praeceſſerat. *i*) Non plane conſtans quidem haec extremorum funiculorum conditio eſt, ſed neque ad indiuiduum quoque corpus tantum pertinet, cum ſimilem funiculorum ſubmerſionem in aliis quoque cordibus iam obſeruauerim. Vtriusque portionis funiculi, vbi propius ad ſtriam accedunt, in ſimplices fibras reſoluuntur, iisque in ſtriam ſe inſerunt. *k*).

*Com-*

---

*a*) Tab. IX. z. y. 3.

*b*) Tab. IX. 5, q. 2. 3.

*c*) Tab. IX. p. q. r. s. t. v.

*d*) Tab. IX. 5. q.

*e*) Tab. IX. w. x. 1. 2. 3.

*f*) Tab, IX. 1. 2. 3.

*g*) Tab IX. x. z.

*h*) Tab. IX. z.

*i*) Tab. IX. y.

*k*) Tab. IX. s. q. 1. 2. 3.

*Comparatio cum ordine ſecundo ſtrati externi.*

Quamuis analogus hic ordo funiculorum funium ordini in ſtrato externo; inſigniter tamen et differt ab eo. A filo cartilagineo anteriori, a baſi porro aortae et a columnae triangularis ſede vterquae oritur. *a*) Tum funes autem ita oblique in ſuperiori iam ſuperficie progrediuntur, vt nacti marginem ventriculi dimidiam eius partem poſteriorem occupent; *b*) funiculi contra, transferſim fere progreſſi, ſolam gibboſam eius partem, vbi ad marginem vsque peruenere, tegunt. *c*) Rhomboideam illi, hi quadratam fere, figuram in hac ſuperiori ſuperficie efficiunt. Inferiorem dum ingrediuntur, vtrisque aeque ad longitudinalem nunc ductum magis appropinquantibus, vel recedentibus a transverſo, eo vsque funes descendunt, vt apicem ventriculi verſus tendentes in faſciculum demum terminalem inferiorem recta incurrant, *d*) omiſſa tota ſtria dexterius, et dimidia fere obliqua parte dexteriori ſuperficiei inferioris ventriculi, pro ordine primo fibrarum, *e*) ſiniſterius vniuerſam ſuperficiem ad marginem vsque occupando. Funiculi contra, quamuis pariter ad longitudinalem ex priori ſuo ductu flexi, tamen eam modo obtinent obliquitatem, vt ad mediam vsque partem ſtriae, nec vlterius, perueniant, *f*) exiguam dexterius et ſuperius pro primo ordine fibrarum, et vix octauam totius inferioris ſuperficiei, partem vacuam relin-

*a*) Tab. IV. Q. C. D. Tab. VII. H. G. B. E.

*b*) Tab. IV. Q. R.

*c*) Tab. VII. H. G. E. 28.

*d*) Tab, VI. 13. 52. 74. 75.

*e*) Tab. VI. 9. 52. C.

*f*) Tab. IX. p. x. 5. 3.

linquendo, *a*) ſiniſterius et inferius maiori quam dimidia eius parte pro caeteris fibrarum ordinibus relicta. *b*). Sic ſimilis ſibi hic ordo fibrarum in vtroque ſtrato maxime tamen et differt.

*Faſciculi procurrentes ſecundi ſtrati cum externi faſciculis iisdem comparati.*

Deinde, quod in ſuperioribus iam notatum eſt, qui procurrens faſciculus maior in ſtrato externo inſignis fuit, quo funium ordo ab ordine fibrarum tertio diſtinguebatur, is minus luculenter in ſtrato ſecundo ſe offert. *c*) Structura tamen in eo, quod rem ipſam concernit, omnino in ſtrato vtroque couenit. Nimirum tertius ordo fibrarum ſub hunc funiculorum ordinem ſe recipit. Maximam partem paralleli ſibi mutuo funiculi decurrunt, et in inferiori imprimis ſuperficie notabili ductu obliquo feruntur, *d*) quo nec a primo etiam fibrarum ordine differunt. Iam et tertii ordinis fibrae inter ſe ipſas parallelae ſatis procedunt, *e*) verum vbi ad marginem ventriculi veniunt, vbi inferiorem ingrediuntur ſuperficiem, aliter quam ambo praecedentes ordines ſe habent. Non oblique deſcendunt, ſed recta transuerſim progrediuntur. *f*) Quo ergo ab ambobus praecedentibus ordinibus tertius ille ordo non modo manifeſto ſe diſtinguit, ſed limites quoque inter tertium et ſecundum ſingulares, *g*) iique prorſus ſimiles effi-

*a*) Tab. IX. l. m. n. o.
*b*) Tab. IX. x. e. 20 11. x.
*c*) Tab. IX. x. z.
*d*) Tab. IX. p. x. 5. 3.
*e*) Tab. VII. E. 30. 34. 39.
*f*) Tab. IX. x. 4. 11.
*g*) Tab. IX. x. z. y.

efficiuntur iis, quibus in ſtrato externo ſecundus et tertius ordo diſtincti erant *a)* Nam et in hoc funes paralleli inter ſe ipſos, ductu imprimis maxime obliquo, et vix a longitudinali diuerſo, dum per inferiorem ſuperficiem ventriculi decurrerent inſignes erant. *b)* In tertio ordine primum notabilis directionis mutatio ſe manifeſtabat, qua propiores ductui transverſo fibrae eius omnes ſub ordinem funium ſe recipiebant. *c)* Id ergo inſigne in ſtrato vtroque inter ſecundum et tertium ordinem fibrarum conuenit. Siue vltimum funiculum nunc in ſtrato ſecundo pro faſciculo procurrente maiori habere velis, ſiue totam pro eo ſumere portionem illam, quae ſe a reliquis funiculis ordinis ſecundi diſtinguit, ſiue nullum prorſus agnoſcere in ſtrato ſecundo funiculum procurrentem; ſtructura tamen eadem in hoc ſtrato locum habet, quae in externo a procurrente hoc funiculo efficiebatur. Alia ac noua directio fibrarum, transuerſo ductui propior, primum in limitibus inter ſecundum et tertium ordinem ſe manifeſtat, tertius ſub ſecundum ſe recipit, et limites eo ipſo inſignes efficiuntur. Haec ſingula in vtroque ſtrato locum habent, nec aliam quamcunque ob cauſam in externo memorabilis procurrens faſciculus fuit, quam propterea, quod haec efficeret.

Supereſt tertius et quartus ordo fibrarum ſtrati ſecundi, quos in ſequentibus exponam.

---

*a)* Tab. IV. 73 77. 78 78 82.
*b)* Tab. VI. 13. 54. 55. 24 76.
*c)* Tab. IV. 75 79. 77. 78. 82.

# OBSERVATIONES CIRCA SALIS COMMVNIS CRYSTALLISATIONEM OPE FRIGORIS EFFICIENDAM,

ET

# DEPVRANDI SALIS HVIVS METHODVS NOVA.

Auctore
*TOBIA LOWITZ.*

*Conuent. exhib. die 26 Aug. 1792.*

§. 1.

Salia plurima, conſtat, duobus modis ex ipſorum ſolutionibus ad ſoliditatis ſtatum reuocari poſſe, quorum vnus partium aquearum euaporatione, alter refrigeratione abſoluitur. Haec ſpontanea, illa coacta, dici poteſt ſalium cryſtalliſatio.

§. 2. Salia, duplicem hanc cryſtalliſandi methodum quae admittunt, cryſtalliſatione ſua, vel ſpontanea vel coacta, aliam atque aliam non cryſtallorum modo figuram oſtendunt; ſed priori quoque caſu maiorem, poſteriori minorem, aquae cryſtalliſationis copiam recipiunt.

§. 3.

§. 3. Sal commune non niſi euaporationis ope ex ſolutione in cryſtallos coire, neque id ſolutionis refrigeratione vnquam fieri, communis hucusque fuit chemicorum opinio, neque etiam ſal hoc, praeter cubicas ex hisque compoſitas pyramidales, aliter figuratas formare cryſtallos viſum eſt. Notum quoque, ordinarias haſce ſalis marini cryſtallos perexiguam aquae cryſtalliſationis copiam, teſte nimirum Cl. Bergmanno, non niſi 6 partes in centenario continere: quo etiam fit, vt ſal hoc igni expoſitum in aqueum liquorem prorſus non abeat, neque in aëre libero, aliorum ſalium ex alcali minerali conflatorum more, in puluerem fatiſcat.

§. 4. Mihi vero hac hyeme circa cryſtalliſationem ſalis marini a modo memoratis toto coelo diſcrepantia videre phoenomena contigit: eaque eo magis digna, quae memoriae traderentur, mihi viſa ſunt, quia eiusmodi concernunt naturae productum, quod abundantiſſime non tantum in orbe noſtro occurrit, ſed latiſſimi etiam vſus et ampliſſimae vtilitatis eſt.

§. 5. Saturata ſalis communis ſolutio ſi hyemali tempore in loco quieto vehementiori frigori exponitur: praeterlapſis aliquot horis, absque vlla praeuia partium aquearum congelatione, in ſolutionis fundo ſatis magna ſalis quantitas in pulcherrimas cryſtallos concreſcit. Increſcente deinde frigore, in ſuperſtite et a prioribus hiſce cryſtallis decantata ſolutione noua etiam eaque ſatis copioſa cryſtallorum quantitas concreſcit, poſteaque ſummo frigore in ſolutionis ſuperficie admodum leuis aquae conglaciatio conſpicitur.

§. 6. Ex his, quas modo dixi, obſeruationibus liquet, iſtam ſalis cryſtalliſationem non deberi partium aquea-



rum

rum congelationi, ſed ſua ſponte nec niſi per ſolutionis refrigerationem fieri, atque ex ipſa hac praeuia ſalis ſecretione inſequentis partium aquearum congelationis cauſſam repeti debere, vtpote quae vehementiſſimo etiam frigore fieri non potuiſſet, ſi ſolutio largiore ſalis quantitate, aquae congelationem quam pertinaciſſime impediente, antea non liberata fuiſſet.

Fallor, an hac in re contraria prorſus chemicorum ſententia hucusque fuit, qui, quantum equidem memini, ſalis communis praecipitationem ex ipſius ſolutione frigori vehementiſſimo expoſita non niſi praeuia partium aquearum congelatione fieri aſſeuerarunt.

§. 7. Inſtitutis ex propoſito tentaminibus, ſingularem iſtam ſalis culinaris cryſtalliſationem non niſi frigore 168 graduum Scalae de l'Islianae obtinere reperi. Cryſtalli hoc modo obtentae ſequentibus gaudent proprietatibus:

a) cryſtalliſationis aquae ſunt ditiſſimae ita, vt in centenario 48 eiusdem complectantur partes: hinc

b) perfectiſſima praeditae ſunt pelluciditate:

Tab. IV. Fig. 5. c) figuram quod attinet, tabulas referunt cryſtalli iſtae hexagonas aequilateras; quatuor marginis lateribus acuminatis, duobus vero ſibi oppoſitis planis, ita, vt, praeter duo plana cardinalia hexagona ſuperius et inferius, decem marginalibus planis cinctae ſint, octo
Fig. 5. nimirum rhomboidalibus, duobus hexagonis oblongis. Has praeter cryſtallos vidi, rariſſime quidem, et alias, quae duas, baſibus connexas, pyramides quatrangulares obliquas, apicibus detruncatis, referebant.

d)

d) aëri ſicciſſimo frigidiſſimoque hyemali tempore expoſitae Glauberiani ſalis ad inſtar in puluerem album fatiſcunt.

e) Ab omnibus hucusque notis ſalibus neutris ea potiſſimum proprietate diſcrepant, quod calore aëris naturali tantillo funduntur, qua liqueſcendi facilitate ſalem non modo Glauberianum, ſed acetum etiam glaciale inſigniter ſuperant. Facillimam hanc cryſtallorum noſtrarum deſtructionem, quam primum naturalis aëris temperies ad 143 gradus De l'Islianos aſcendit, nunquam non contingere, experimentis ſedulo inſtitutis reperi. Notandum tamen eſt,

f) liqueſcentiam hanc non eſſe perfectam, ſed partialem tantum; haud enim exigua ſalis noſtri pars ſub pulueris arenoſi albi forma irreſoluta remanet, id quod non fieri non poteſt, cum ſuperſtes in cryſtallis noſtris aquae cryſtalliſationis quantitas ſoluendae omni ſalis copiae impar ſit, ſiquidem una ſalis communis ordinarii pars, vt ſoluatur, tres fere aquae partes poſtulat, cuius in noſtro ſale non niſi vna continetur.

§. 8. Ex vltimo hoc phaenomeno, facillimam dico ſalis noſtri liqueſcentiam, id concludere licet, diuerſam ſalium in aqua cryſtalliſationis ſua liqueſcendi facilitatem non a ſola aquae huius quantitate pendere, ſed a diuerſo quoque attractionis gradu repetendam eſſe, qua ſalina et aquoſa elementa corpus ſolidum cryſtallinum conſtituentia inter ſe cohaerent. Sal enim Glauberi, vitriolum martis, ſoda cryſtalliſata, pluraque alia, prae noſtro ſale aquae criſtalliſationis copia abundant, qua tamen non obſtante, caloris gradum, vt liqueſcant, longe maiorem poſtulant.

§. 9.

§. 9. Inſignis interdum cryſtallorum harum magnitudo eſt. Ex ſaturata quatuor ſalis communis librarum ſolutione frigore a 149 ad 172 vsque gradus per nichtemerum ſenſim ſenſimque increſcente, vna cryſtalliſatione ſesqui libras cryſtallorum, formas hexagonas exhibentium, obtinui, quarum nonnullae diametri erant duorum pollicum.

§. 10. Notatu et id dignum occurrit, quod, ſi ſalis communis ſolutio vehementiſſimo frigore ſub cryſtalliſationis ſuae initium in vas vitreum aliud cito transfunditur, breui tempore multae conſpiciantur, per omnem liquorem hinc inde natantes, cryſtalli hexagonae oblongae, quae ob eximiam tenuitatem motu leniſſimo fundum petunt, et ambitu ſimul ſuo ſenſibiliter creſcunt, acetique glacialis more, omnes colores prismaticos quam pulcherrime referunt.

§. 11. Quem expoſui in praecedentibus ſalis marini per frigus cryſtalliſandi modum, is nouam nobis eamque facilem eiusdem ſalis depurandi methodum ſuppeditat. Omnia enim, quibus ſal culinare inquinatum ſemper eſt, ſalia heterogenea partesque pingues, peracta cryſtalliſatione, in liquore ſuperſtite remanent, et quae cryſtallis externe adhaeret, perexigua particularum heterogenearum copia, decantato liquore, ſeparatur omnis, ſimulac cryſtalli ſacco linteo immiſſae in loco calidiore in aqueum liquorem abeunt, quo fit, vt ſatis magna ſalis copia irreſoluta ſub pulueris forma in ſacco reſidua reperiatur, quae exſiccata albiſſimum et ab omnibus heterogeneis plane liberatum ſal marinum exhibet.

§. 12. Sal commune conſueta methodo et ſumma quantumuis cura depuratum ſemper tamen ſalium terreorum non

non nihil continet; quae ſalia heterogenea manifeſtis ſe prodare indiciis, ſimulac filtratae eiusmodi ſalis communis ſolutioni aliquot ſolutionis terrae ponderoſae nitratae vel acidi ſachari guttulae miſcentur. Salis autem noſtra methodo (§. 11.) depurati ſolutionem reagentia haec ne hilum quidem turbant.

§. 13. Supra iam monui (§. 5.) in vna eademque ſalis communis ſolutione primae cryſtalliſationi, increſcente frigore, ſuccedere ſecundam, vbi quidem monendum eſt, crystallos has ſecunda cryſtalliſatione obtinendas permultis inquinari cryſtallulis aculeatis veram magneſiam vitriolatam exhibentibus; vnde colligitur, ſi ſalis communis per frigus crystalliſatio ſalis depurandi cauſſa ſuſcipiatur, eas tantum, quae prima cryſtalliſatione obtinentur, cryſtallos laudata puritate pollere: eas vero, quas ſecunda offert et tertia cryſtalliſatio, ob mixtum iis ſal amarum, impuras et ſeorſim conſeruandas eſſe.

§. 14. Conſtat itaque nunc ex iis, quas expoſui, nouis obſeruationibus, ſal marinum, aliorum complurium more, ſpontaneam cryſtalliſationem, vnica ſcilicet refrigeratione, ſubire, hocque in caſu larga aquae cryſtalliſationis copia ſe imbuere, cryſtallosque formare figurae a conſueta plane discrepantis. Conſtat et id, cauſſam ob quam dicta cryſtalliſatio non niſi frigidiſſimo hyemali tempore ſuccedit, ex ſumma ea, quam dixi, liqueſcendi facilitate repeti debere, qua efficitur, vt cryſtalli noſtrae leuiſſimi etiam caloris acceſſu in aqueum liquorem abeant.

Caeterum haec, quae detegere mihi contigit, et, ni fallor, plane noua, amplum complurium aliorum eiusdem generis experimentorum campum aperiunt, vt, quae ſit frigoris in alias ſalium ſpecies efficientia, exploretur, quibus inſtituendis proxima hieme operam dabo.

# OBSERVATION
# SUR LES EAUX MARTIALES
## DU GOUVERNEMENT D'OLONETZ.

Par

*NICOLAS OZERETSKOVSKY.*

*Communiqué à l'Académie le 23 Janv. 1792.*

Dans la déſcription des mines de Woëtzk, que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie l'année paſſée, il étoit dit, que dans le Gouvernement d'Olonetz, & ſourtout dans les provinces de Pétroſawodsk & de Powenetz, on a découvert pluſieurs indices des différents minéraux; ce qui eſt très vrai; le nombre des pareilles découvertes eſt même ſi grand, qu'on pourroit prendre les dites provinces pour un autre Pérou, ſi les éſſais, faits avec quelques-uns de ces minéraux, avoient promis plus de richeſſes, qu'il n'y en a effectivement. Déja en 1774 on a connu 528 endroits, où il y avoit des mines de cuivre, dont les indices ſont ſi répandus par tout ce pays montagneux, que même dans les carrieres du marbre de Tiwdia (*), on rencontre très ſouvent des petites houppes

(*) Tiwdia eſt une riviere, formée par pluſieurs lacs, qui portent différens noms, & qui communiquent l'un avec l'autre par le moyen de la dite riviere, laquelle tombe enfin dans le lac Sandal. A deux werſte de ſon

houppes & des aiguilles de mine de cuivre verte extrémement delicates, enſorte qu'on ne peut les toucher ſans les écraſer ſous les doigts; & en regardant leur petiteſſe, on diroit, que la nature n'ait fait que commencer à les produire, ou qu'elle ne poſſede point aſſez de matiere, pour en fournir à leur accroiſſement & remplir dans le marbre les cavités, qui leur ſervent de nids. Les mines de plomb ont été découvertes dans 43, & celles de fer dans 172 endroits. Il y avoit auſſi des mines d'or, dont on comptoit ſix. Cependant toutes ces découvertes ont été inutiles & même très couteuſes, quand on eſſaioit de tirer & de fondre quelque-unes de ces mines, que l'on a reconnu ou fort pauvres, ou fort difficiles pour être exploitées, à cauſe de la dureté du quartz, qui leur ſervoit de gangue, ou que les filons de ces mines étoient d'une très petite étendue. C'eſt pourquoi elles furent toutes abandonnées, exceptées deux mines de fer, dont l'une ſe trouve tout-près des eaux Martiales, & dont l'autre n'en eſt éloignée que de 33 werſtes. D'abord je vais parler de la premiere.

Les eaux Martiales ſont ſituées à 44 werſtes de Pétroſawodsk, au fond des montagnes adjacentes au lac Onega. Elles ont été découvertes ſous le regne de Pierre I. Les ſources de ces eaux ſe trouvent au pied d'une montagne, d'où elles découlent dans une grande plaine & y transportent une terre martiale, que l'on employe à la fonte des canons dans la fonderie de Pétroſawodsk; & c'eſt cette terre, qui conſtitue la mine de fer aux eaux martiales, lesquelles dépoſent,

 outre

ſon embouchure, ſur le coté droit, il y a une carriere de marbre rouge, rayé de blanc, qu'on travaille & qu'on transporte à Pétersbourg, où l'on l'employe pour bâtir les édifices.

outre celà, dans la dite plaine, une terre noire, empreinte des parties vitrioliques & alumineuſes.

L'autre mine de fer, éloignée des eaux martiales de 33 werſtes, ſe trouve dans un lac, appellé Nelhomoſero, dont on la tiroit. Elle fait le premier lit de ſon fond. C'eſt auſſi une terre martiale, depoſée dans le lac par les eaux des ſources minérales, qui y coulent; car ſitôt qu'elle eſt emportée, on voit paroitre une argille bleuâtre, qui conſtitue le véritable fond du lac.

À peu de diſtance du dit lac, il y en a un autre, nommé Noydomoſero, dont on tiroit, pendant pluſieurs années, une pareille mine de fer, qui eſt toute épuiſée. Les mines de ces trois endroits & des pluſieurs autres ſe reſſemblent parfaitement, & on les employe pour la fonte des canons, ſans diſtinction. Leur origine doit être auſſi la même; & voici pourquoi.

Le pays montagneux où ſe trouvent ces mines de fer ochracées ou plûtot terreuſes, eſt très abondant en ſchiſte pyriteux, qu'on rencontre non ſeulement ſur les pentes & dans les contours des montagnes, mais auſſi dans les plaines & dans les lieux très bas. On en voit des couches dans le rivage du lac Onéga à peu de diſtance de la paroiſſe Tolwouy; il conſtitue un grand banc dans le rivage du lac Sandal entre les villages Erſchi & Matiukow Navolok. En général, il y exiſte presque par-tout, auſſi bien dans la terre ferme, qu'aux isles, qui ſont très frequentes dans les lacs, dont on compte 1998 dans tout le Gouvernement d'Olonetz. Ce ſchiſte, dans pluſieurs endroits, eſt à-decouvert; les champs mêmes ou la terre labourable en ſont parſemés; mais

mais il y eſt briſé en petites tablettes par le ſoc de la charrue, & défend les grains ſemés des intempéries de l'Atmoſphere, comme de la trop grande ſécheresſe, en empéchant l'humidité de la terre de s'évaporer, & du grand froid qui ſurvient au commencement d'été, en détournant du bled ſemé ſes éffets nuiſibles. Partout où il y en a des couches, il ſe trouve en grandes feuilles ou plûtot en tables groſſes & fort dures, dans lesquelles la matière pyriteuſe eſt très abondante, enſorte qu'il ne faut que des yeux tout nuds pour diſtinguer les parties minérales dont ce ſchiſte eſt empreint. Il n'eſt pas même rare de voir dans les groſſes planches de ce ſchiſte des cryſtalliſations pyriteuſes, ſemblables à des marcaſſites, qui font des petites protubérances ſur les feuilles plattes de ce ſchiſte, qui eſt bien noir & fort dur, comme je l'ai déjà dit; mais il eſt à remarquer, qu'on en trouve en différens endroits des grandes maſſes ſur la ſurface de la terre, tout-à-fait ſeparées des couches ſchiſteuſes, & que ces maſſes n'ont plus la même ſolidité que le ſchiſte en couches; au contraire, on les caſſe très facilement avec un léger coup de marteau, & elles tombent alors en petites portions, dans lesquelles la ſtructure ſchiſteuſe eſt toujours viſible, car leur caſſure s'opére ou par tablettes, ou par portions à cotés applatis. À l'isle Lyſchnoy dans le lac Sandal, à l'isle Klimetzkoy dans le lac Onega & dans pluſieurs autres endroits, on trouve fréquemment des pareilles maſſes de ce ſchiſte, & non ſeulement il eſt très aiſé de les caſſer à petits coups, mais elles ſe decompoſent d'elles mêmes. Quand on caſſe ces masſes, on y decouvre une ochre ferrugineuſe jaune & rougeâtre, qui couvre ou enduit la ſurface du ſchiſte pret à ſe décompoſer. En caſſant pluſieurs morceaux de ce ſchiſte, je me ſuis aſſuré de l'exiſtence de cette terre ferrugineuſe dans les maſſes ſchiſteuſes, & il me paroit très probable, que toutes

les mines de fer des lacs ou marecageuſes, qui ſont ſi nombreuſes dans tout ce pays, tirent leur origine de la décompoſition du ſchiſte pyriteux; & comme il ſe décompoſe ſur la ſurface de la terre, y étant en morceaux détachés de ſa couche, la même choſe lui doit arriver auſſi dans l'intérieur de la terre. Car s'il n'y a point de doute, que ce ſont l'air & l'eau, qui le décompoſent, quand il eſt expoſé au jour; il eſt très naturel d'attribuer auſſi aux mêmes élémens ſa décompoſition dans l'intérieur de la terre. Pour cela on n'a qu'à prendre en conſidération la conſtitution du pays, qui ne conſiſte, pour ainſi dire, que de montagnes, de lacs, de rivières & de ſources; en un mot, partout il n'y-a que des montagnes & des eaux. Ainſi les couches du ſchiſte pyriteux ne peuvent nullement être à l'abri de cet élément, même dans une grande profondeur de la terre; mais elles doivent par tout en éprouver l'action, & étant attaquées par les eaux, qui les lavent, la matière pyriteuſe, dont elles ſont impregnées, le met en mouvement, l'union des parties intégrantes de ce ſchiſte ſe détruit, il tombe en éfflореſcence & ſe décompoſe. Quand cela eſt fait, les mêmes eaux, qui ont decompoſé ce ſchiſte, en entrainent les parties avec elles, & étant ſorties hors de la terre, elles les depoſent dans les lacs & dans les plaines, où elles coulent.

C'eſt à cette décompoſition du ſchiſte pyriteux, que les eaux appellées martiales doivent les ſubſtances, qu'elles contiennent, & qui ſont la terre ferrugineuſe & la terre vitriolique. Cette derniere eſt dépoſée tout-près de l'iſſue des eaux-martiales, au pied de la montagne dont elles ſourdent; & la premiere eſt entrainée un peu plus loin dans une vaſte plaine, dans laquelle l'eau ſe diſperſe en y laiſſant cette terre ferrugineuſe, qui conſtitue la mine de fer, employée pour la fonte des

ca-

canons. C'eſt dans cette plaine, qu'on trouve des morceaux dé bois, penétrés par les eaux minérales & dévenus comme pétrifiés.

La terre vitriolique a un gout très piquant; elle eſt de couleur noire. On en prépare, à l'endroit même, de la couperoſe verte.

On tire ainſi des eaux martiales un double profit, en mettant en uſage les deux terres minérales, qui en réſultent; mais ſi l'on vouloit employer ces eaux à l'uſage interne, & les prendre pour ſalutaires, comme on a cru du tems paſſé; elles ne pourroient aucunement répondre à ce but; puisque, quand on les raſſemble dans un baſſin, au ſortir de leur ſource, elles y ſont tellement impregnées de vitriol, qu'elles ne ſont pas même potables. Leur gout auſtère eſt inſupportable; & comme elles contiennent auſſi une portion de ſubſtance alumineuſe, qui les rend ſtiptiques, leur uſage interne ne peut qu'être nuiſible.

On voit par tout ce que je viens de dire, que les avantages, qu'on tire des eaux martiales, ne ſont point conſidérables; parceque la mine de fer, provenante de ces eaux, n'eſt pas de bonne qualité, & que le fer de fonte, qu'on en obtient, eſt fort aigre & caſſant; enſorte que ſi cette mine n'appartenoit pas à la couronne, mais à un particulier, elle ſeroit déjà dipuis longtemps abandonnée.

La terre vitriolique, dont on fabrique de la couperoſe verte, me paroit être incomparablement plus vtile, que la dite mine; car elle fournit beaucoup de vitriol; & comme il y en a une très grande quantité, on ne doit pas craindre, qu'elle puiſſe être bientôt épuiſée.

Mais

Mais en tirant ces avantages des eaux martiales, il faudroit auſſi faire attention à ce ſchiſte pyriteux, qui fournit les dites ſubſtances, & qu'on y trouve dans pluſieurs endroits, & ſouvent ſous la premiere couche de terre. Jusqu'à préſent on n'avoit cherché dans ce pays que des mines d'or, d'argent, de cuivre, de plomb & de fer, & on n'a pas penſé à cette ſubſtance, ſi commune dans nôtre pays, laquelle étant fouillée, pourroit être utile par elle même, en fourniſſant de la terre vitriolique, après s'être décompoſée à l'air & par l'humidité; mais en outre elle conduiroit peut-être à des découvertes beaucoup plus importantes. Car c'eſt toujours ſous les couches des ſchiſtes qu'on trouve des bonnes ardoiſes, qui s'annoncent ordinairement par un lit de ſchiſte noirâtre; & lorsqu'on ne trouve pas l'ardoiſe au-deſſous des ſchiſtes, dit M. de Buffon (*), on peut eſpérer d'y trouver des charbons de terre, aux veines desquels les ſchiſtes ſervent de lits & d'envéloppe.

(*) Hiſt. natur. des Minéraux, à l'article des ſchiſtes.

# ASTRONOMICA
ET
# METEOROLOGICA.

# OBSERVATIONES NONNVLLAE ASTRONOMICAE. PETROPOLI HABITAE.

Auctore
*STEPHANO RVMOVSKI.*

*Conuent. exhib. die 2 Dec. 1793.*

Anno 1775.

Die $\frac{22\ \text{Sept.}}{2\ \text{Oct.}}$ Immers. I. Satell. Iouis - $10^{h.}\ 29'.\ 4''.$ t. v.

Obſeruatio bona peracta eſt tubo Gregoriano bipedali, prout omnes reliquae.

1778.

Die $\frac{22\ \text{Ian.}}{2\ \text{Febr.}}$ Immerſ. I. Satell. Iovis - 9. 30. 16.

Obſeruatio dubia Iove non procul ab oppoſitione cum Sole diſtante.

Die $\frac{28\ \text{Febr.}}{11\ \text{Mart.}}$ Emerſ. II. Satell. Iovis - 9. 58. 19.

Luna non procul a Ioue remota ſatellitem iuſto tardius conſpexiſſe me exiſtimo, nam intenſiori iam lumine quam par eſt lucebat, dum eum conſpicio.

Die $\frac{9}{20}$ Mart. Emerſ. I. Satell. Iouis - $12^h. 16'. 23''$. t. v.

Die $\frac{25 \text{ Mart.}}{5 \text{ April}}$. Emerſ. I. Sat. Iouis - 10. 38. 48.

Pari cum reliquis lumine lucet 10. 39. 28.

Eadem die Immerſ. IV. Satell. Iouis.

Lumen ſatellitis diminutum - 11. 45. 39.

Diſparuiſſe videtur - - 46. 40.

Obſeruatio dubia: nam cum lumine diminuto cerneretur, tam exiguo interuallo a primo fuit ſeiunctus, vt cum illo cohaerere videretur, et nec niſi lumine debiliori differebat a primo.

Die $\frac{30 \text{ Mart.}}{10 \text{ Aril.}}$ Emerſ. III. Satell. Iouis

Dubito de praeſentia Satellitis - - $9^h. 30'. 1''$. t. v.

Nam tardius eum expectaueram

Certus ſum illum prodiiſſe - - - 9. 30. 7.

Caelo ſereno, aere tranquillo, obſeruatio bona.

Die $\frac{31 \text{ Mart.}}{11 \text{ April.}}$.

Emerſ. II. Satell. Iouis - - - $9^h. 54'. 32''$.

Emerſ. I. Satell. Iouis - - - 12. 35. 20.

Pari lumine cum reliquis lucet 36. 0.

1779.

Die $\frac{29 \text{ April.}}{10 \text{ Maii.}}$ Emerſ. I. Satell. Iouis

Dubito de praeſentia ſatellitis - - $10^h. 10'. 20''$.

Certus ſum illum prodiiſſe - - 10. 32.

1780.

1780.

Die $\frac{20 \text{ Febr.}}{2 \text{ Mart.}}$ Emerſ. II. Satell. Iouis - $15^h. 27'. 25''$. t. v.

Obſeruatio dubia.

Die $\frac{29 \text{ Febr.}}{11 \text{ Mart.}}$ Immerſ. I. Satell. Iouis - 11. 51. 16.

Coelo ſereno, ſed faſciis minus diſtincte conſpicuis.

Die $\frac{8}{19}$ Mart. Immerſ. II. Satell. Iouis - $12^h. 22'. 38''$

Eadem a Socio tubo tripedali achrom. 22. 50.

Die $\frac{9}{20}$ Martii occultatio γ ♍ a Luna.

Immerſio ſtellae ad limbum ☽ lucidum $14^h. 22'. 48''$.

Obſeruatio exacta ad vnum minutum ſecundum

Emerſio ad limbum ☽ obſcurum - $15^h. 26'. 9''$.

Obſeruatio non aeque exacta ac praecedens, inſtituta enim eſt oculo non in id ipſum punctum directo, ad quod contigit emerſio; incertitudo tamen non niſi 4 aut 5 minutorum ſecundorum eſſe potuit.

Die $\frac{4}{15}$ Maii. Emerſ. II. Satell. Iouis.

Satelles prodit in conſpectum - $11^h. 23'. 47''$. t. v.

Pari lumine cum reliquis lucet - 24. 53.

Die $\frac{17}{28}$ Maii. Emerſ. I. Satell.

Credo ſatellitem prodire - - 11. 12. 23.

Certus ſum de eius praeſentia - 12. 30.

Pariter cum reliquis fulget - - 13. 8.

1781.

Die $\frac{3}{14}$ Mart. Immerſ. I. Satell.

| | | |
|---|---|---|
| Lumen ſatellitis imminutum | - - | $14^h. 43'. 9''.$ t. v. |
| Dubito de eius praeſentia | - - | 43. 42. |
| Certus ſum illum diſparuiſſe | - - | 43. 47. |

Die $\frac{19}{30}$ Mart.

| | | |
|---|---|---|
| Immerſ. I. Satellitis Iouis | - - | $13^h. 3'. 39''.$ |

Obſeruatio ob viciniam Iouis horizonti et ſplendorem Lunae dubia.

Die $\frac{26 \text{ Mart.}}{6 \text{ April.}}$ Immerſ. I. Satell.

| | | |
|---|---|---|
| Satelles debili lumine lucet | - - | $14^h. 58'. 3''.$ |
| Diſparet | - - - - | 58. 48. |

1783.

Die $\frac{22 \text{ Iulii}}{2 \text{ Aug.}}$. Emerſ. I. Satell.

| | |
|---|---|
| Satelles prodire ſed denuo diſparere videtur | $11^h. 12'. 30''.$ |
| Certus ſum de eius praeſentia - - | 12. 51. |

Obſeruatio peracta eſt Ioue tenui nubecula tecto, faſciis non diſtincte conſpicuis.

Die $\frac{7}{18}$ Aug.

| | | |
|---|---|---|
| Emerſ. I. Satellitis Iouis | - - | $9^h. 35' 18''.$ |

Obſeruatio dubia ob nebulam.

1784.

1784.

Die $\frac{16}{17}$ Iulii. Immerſ. III. Satell.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Satellitem vix ac ni vix quidem conſpicio | $12^h$. | $12'$. | $45''$. t. v. |
| Certus ſum eum immerſiſſe - - | | 12. | 53. |
| Die $\frac{31\ Iulii}{11\ Aug.}$. Immerſ. I. Satell. - - | 14. | 42. | 20. |

1785.

Die $\frac{5}{16}$ Sept. Immerſ. I. Satell.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lumen ſatellitis imminutum - - | 14. | 29. | 29. |
| Diſparet prorſus - - - - | | 30. | 4. |

Obſeruatio bona.

DE-

# DÉSCRIPTION
# D'UN MÉTÉORE REMARQUABLE,
## OBSERVÉ À St. PÉTERSBOURG LE 18 JUIN 1790.

Par
*M. TOBIE LOWITZ.*

*Preſenté à l'Académie le* 18 *Octobre* 1790.

Tab. VII. Le matin du 18 Juin, la région viſible de l'Atmoſphère étant par tout uniformement chargée de vapeurs ſemblables à un brouillard, cette conſtitution de l'air occaſiona un phénomène des plus beaux, des plus rares & des plus remarquables par ſa variété. Je commençai de m'en appercevoir à 7 heures 30 minutes & je l'obſervai jusqu'à ſa fin, en le décrivant avec la plus grande exactitude.

1. Le ſoleil étoit entouré de deux cercles *e b d k* & *e i d e* qui ſe coupoient en *d* & *e*, & dont la couleur étoit rougeatre du coté tourné vers le ſoleil & blanchâtre du coté oppoſé. Le ſoleil étoit ainſi placé en *a* entre leurs centres *α* & *β*. Les arcs extérieurs *d b e* & *d c e* étoient beaucoup plus clairs & plus brillans que les intérieurs *d k e* & *d i e*. La reſſemblance des couleurs donnoient à ces derniers une figure

figure allongée ou ovale, & les deux autres avoient la forme d'un cercle applati par le bas & le haut. Au point ſupérieur de leur interſection on en voyoit une partie conſidérable *w d w* d'une vivacité extraordinaire, dont la ſplendeur éblouïſſante incommodoit autant la vüe que le ſoleil même.

2. Le point d'interſection inférieur *e* touchoit à un arc demi-cercle renverſé *r e f* fort clair & large, qui rélativement à ſon diametre étoit le plus petit de tous les arcs.

3. Un autre cercle *z z z*, pareillement coloré mais à une plus grande diſtance du ſoleil & imparfait vers l'horizon, qu'un arc ſupérieur *p z q* faiſoit paroître cornu, avoit le ſoleil même pour centre.

4. Ce dernier cercle touchoit vers le midi & vers l'orient à deux arcs renverſés *t t* & *v v*, oppoſés au ſoleil, parfaitement ſemblables à des parties d'arc en ciel, tant par leur largeur que par la vivacité des couleurs prismatiques, en quoi ils ſe diſtinguoient de tous les autres arcs de ce météore. Les bâtimens m'empechoient de voir ſi ſes bouts s'étendoient jusqu'à l'horizon.

5. Encore un aute cercle entier & blanc *a f h g a* qui renfermoit une très grande étendue, étoit parallèle à l'horizon, qu'il entouroit de toute part, & qui avoit conſéquemment le Zénith pour centre. Dans la circonférence de celuici ſe trouvoit le ſoleil même & cinq parhélies, dont trois *f*, *h* & *g* vis à vis du ſoleil vers NOu. étoient blancs & pâles, & les deux autres *x* & *y* à chaque coté du ſoleil, en SE, colorés & fort brillans.

6. Ces deux derniers parhélies qui ſe trouvoient à quelque diſtance des interſections du grand cercle horizontal par les deux couronnes qui entourent le ſoleil, renvoyoient d'abord des deux cotés de parties d'arc très courtes colorées *x i* & *y k* dont la direction s'inclinoit au deſſous du ſoleil jusqu'aux deux demi-arcs de cercle intérieurs *d i e* & *d k e*. En ſecond lieu ils étoient pourvues des queues longues, claires & blanches *x* $\zeta$ & *y* $\eta$, oppoſées au ſoleil & renfermees dans la circonference du grand cercle *a ſ h g*.

7. Enfin deux grands arcs de cercle *dlh* & *dmh* de couleur blanche parurent en dedans du grand cercle horizontal *a ſ h g*, mais ils étoient ſi pâles, que pluſieurs perſonnes à qui je m'efforçois de les montrer, ne le purent pas apperçevoir. D'abord ils ſe rencontroient près du ſoleil en *d* dans la clarté éblouïſſante, & ſe croiſoient enſuite de l'autre coté eux mêmes, ainſi que le grand cercle, dans le centre du parhélie pâle *h*, d'où ils s'étendoient ſenſiblement plus loin, au delà de quelques degrés du grand cercle vers le N. Ou. de l'horizon, en *n* & *o*.

Tel étoit ce beau météore à 10 heures avant midi, où il avoit atteint ſa plus grande perfection. À l'égard du changement ſucceſſif de ſes parties, je fis encore les obſervations ſuivantes :

À 7 heures 30 min. du matin les deux couronnes autour du ſoleil *d b e k* & *d c e i* n'étoient pas encore dans leur perfection, on ne voyoit que leurs arcs intérieurs *die* & *dke* ſous la figure d'un oval parfait avec ſa clarté brillante d'enhaut *d*. Ce ne fut que peu à peu que cette clarté s'etendoit des deux côtés, en formes d'arcs *d w*, *d w*, qui dévenoient de

de plus en plus grandes, jusqu'à ce qu'ils ſe réunirent enfin à 9 heures entièrement en *e* près du demi-cercle brillant *r e f*.

Ce qu'il y avoit de plus remarquable dans ces deux cercles ou couronnes, qui ſe croiſoient, qu'après avoir atteint leur perfection ils s'approchoient de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin ils ne formérent qu'une ſeule couronne qui avoit le ſoleil pour centre. Cependant on obſerva toujours vers les parties ſupérieure & inférieure une clarté très ſenſible. Vers ce même temps disparurent les deux arcs de couleurs prismatiques *t t* & *v v*. Les deux parhélies *x* & *y* au contraire s'eloignoient du ſoleil de plus en plus & diſparurent enfin entièrement à $10^h. 45'$.

Le grand cercle horizontal *a f h g a* & ſes trois parhélies foibles *f*, *h* & *g* reſterent encore & ne disparurent qu'à $11^h. 35'$. Ce qui méritoit encore d'ètre remarqué dans ce grand cercle, c'eſt que conſervant toujours le ſoleil & ſes cinq parhélies dans ſa circonférence, il reſtoit conſtamment parallèle à l'horizon, & gardoit conſéquemment le zénith pour centre: c'eſt pourquoi plus le ſoleil approchoit du méridien, plus il s'élévoit ſur l'horizon, le grand cercle dont l'étendue étoit d'abord extrèmement grande, lorsque le ſoleil étoit encore peu élévé, alla toujours en diminuant, jusqu'à ce qu'à la fin ſon diamètre devint prèsque auſſi petit que celui des deux couronnes réunies. La même choſe arriva aux deux arcs *d l h* & *d m h* qui ſe trouvoient dans le cercle horizontal. Leurs points d'interſection furent toujours en *h* & *d*.



À

À midi il ne reſta plus rien de ce beau phénomène qu'une ſimple couronne très luiſante dans ſes bords ſupérieurs & inférieurs, qui disparut enfin entièrement à 12 heures midi 30 minutes.

En général ce météore étoit composé de douze arcs divers, dont neuf étoient colorés, de ſorte que partout le rouge ſe trouvoit tourné vers le ſoleil & le blanc aux côtés oppoſés.

EX-

# EXTRAIT
## DES OBSERVATIONS
# MÉTÉOROLOGIQUES
## FAITES À ST. PÉTERSBOURG
## EN L'ANNEÉ MDCCXC.

Daprès le nouveau Stile.

*Préſenté à l'Académie le* 3 *Mars* 1791.

## I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1790.

| Mois. | Au plus haut P. cent. | Au plus haut jour, heure | Au plus bas P. cent. | Au plus bas jour, heure | Variation. cent. | Milieu P. cent. | Hauteur moyenne P. mill. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 28.77 | le 4à 2h.s. | 27.47 | le13à 6h.s. | 130 | 28.12 | 28.202 |
| Février | 28.47 | le20à 3h.m. | 27.18 | le 6à 3h.m. | 129 | 27.82 | 27.863 |
| Mars | 29.09 | le28à 9h.m. | 27.52 | le 7à 3h.m. | 157 | 28.30 | 28.359 |
| Avril | 28.91 | le 1à12h.m. | 27.82 | le21à 9h.m. | 109 | 28.36 | 28.291 |
| Mai | 28.68 | le12à 6h.m. | 27.80 | le16à 4h.m. | 88 | 28.24 | 28.257 |
| Juin | 28.39 | le20à 9h.m. | 27.63 | le28à 2h.m. | 76 | 28.01 | 28.023 |
| Juillet | 28.23 | le27à 5h.s. | 27.41 | le18à12h.m. | 82 | 27.82 | 27.904 |
| Août | 28.21 | le15à 4h.s. | 27.62 | le19à 4h.m. | 59 | 27.91 | 27.948 |
| Septembr. | 28.49 | le21à12h.m. | 27.31 | le26à 4h.m. | 118 | 27.90 | 27.952 |
| Octobre | 28.68 | le 4à11h.s.<br>le 5à11h.m.<br>le26à 6h.m. | 27.16 | le16à 6h.s. | 152 | 27.92 | 28.085 |
| Novembr. | 28.74 | le 8à 6h.m. | 27.42 | le22à 6h.s. | 132 | 28.08 | 28.176 |
| Décembr. | 28.59 | le30 matin. | 26.96 | le12à11h.m. | 163 | 27.77 | 27.906 |

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *après-midi*.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

| Mois. | Au deſſus de 27. 80 jours h. | 27. 90 jours h. | 28. 00 jours h. | 28. 10 jours h. | 28. 20 jours h. | un demi-mois au deſſus de Pouces. mill. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier. | 29. 0 | 26. 18 | 23. 21 | 21. 0 | 17. 0 | 28. 248 |
| Février | 18. 15 | 14. 21 | 7. 15 | 4. 21 | 3. 0 | 27. 923 |
| Mars | 29. 12 | 27. 18 | 26. 9 | 24. 15 | 20. 0 | 28. 316 |
| Avril | 30. 0 | 29. 12 | 28. 9 | 25. 15 | 17. 6 | 28. 267 |
| Mai | 31. 0 | 29. 18 | 28. 12 | 25. 3 | 18. 9 | 28. 240 |
| Juin | 27. 21 | 24. 21 | 16. 12 | 8. 6 | 3. 9 | 28. 025 |
| Juillet | 25. 6 | 14. 12 | 8. 18 | 3. 21 | 1. 0 | 27. 915 |
| Août | 26. 15 | 18. 15 | 12. 9 | 4. 3 | 0. 6 | 27. 939 |
| Sept. | 20. 0 | 16. 15 | 10. 21 | 8. 15 | 5. 18 | 27. 929 |
| Oct. | 25. 0 | 18. 21 | 14. 21 | 13. 15 | 11. 12 | 27. 980 |
| Nov. | 26. 12 | 25. 3 | 20. 15 | 17. 21 | 14. 15 | 28. 189 |
| Déc. | 17. 12 | 14. 21 | 13. 21 | 11. 21 | 8. 21 | 27. 882 |
| Année. 1790. | 306, 21 | 262, 3 | 212, 15 | 169, 12 | 121, 0 | 182½ jours au deſſus de 28.030 |
| du 1 Nov. 1789. au 1 May 1790. | 155, 3 | 141, 0 | 123, 9 | 106, 9 | 78, 15 | 90½ jours au deſſus de 28, 157 |
| du 1 May au 1 Nov. 1790. | 155, 18 | 123, 3 | 91, 21 | 63, 18 | 40, 6 | 92 jours au deſſus de 27, 999 |

La

La plus grande élévation du mercure dans le Baromètre = 29. 09 pouces de Paris, le 28 Mars à 9 heures du matin. Thermomètre de Délisle 162. Ciel ſerein, vent du Sud.

La plus petite élévation = 26. 96 le 12 Décembre à 11 heures avant midi. Therm. 153. Ciel couvert, neige & un vent très fort de l'Oueſt.

La variation totale = 2, 13: le milieu = 28. 025.

La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par leur nombre.

1. Pour toute l'année = 28. 082.
2. Pour l'hyver de 1789 à 1790, ou depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 May 1790 = 28. 143.
3. Pour l'été de 1790, ou depuis le 1 May jusqu'au 1 Novembre 1790 = 28. 028.

La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande au mois de Mars, & la plus petite au mois de Février: la différence eſt = 0, 496, ou bien presque d'un demi-pouce.

3.) Va-

## 3.) Variations ſubites & extraordinaires.

| Mois. | Temps jour. | heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. | $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2. | 10. s. | 39 | 28. | 25 | +52 | 149 | SOu. | ciel couvert. |
| | 4. | 1. s. | | 28. | 77 | | 166 | Ou. fort. | ciel demi-couvert. |
| | 4. | 12. s. | 27 | 28. | 65 | —93 | 165 | SOu. ff. | c. couvert, neige & pluie. |
| | 6. | 3. m. | 23 | 27. | 72 | +51 | 148 | NOu. | ciel couvert, enſuite pluie. |
| | 7. | 2. m. | | 28. | 23 | | 163 | NOu. | ciel couvert. |
| | 7. | 4. s. | 32 | 27. | 94 | +57 | 163 | NOu. | ciel couvert. |
| Janv. | 8. | 12. s. | | 28. | 51 | | 175 | SOu. | ciel ſerein. |
| | 9. | 11. m. | 18 | 28. | 54 | —41 | 174 | S. | ciel ſerein. |
| | 10. | 5. m. | | 28. | 13 | | 154 | SOu. | ciel couvert. |
| | 12. | 9. m. | 33 | 28. | 02 | —55 | 148 | SOu. | c. couvert, petite pluie. |
| | 13. | 6. s. | 24 | 27. | 47 | +51 | 146 | SOu. fort. | c. couvert, pluie. |
| | 14. | 6. s. | | 27. | 98 | | 151 | NOu. fort. | c. ſerein, enſuite couvert. |
| | 15. | 10. m. | 30 | 27. | 87 | +56 | 155 | NOu. fort | c.couv. neige,enſuite c.ſerein. |
| | 16, | 4. s. | 14 | 28. | 43 | +16 | 165 | N. | ciel ſerein. |
| | 17. | 6, m. | | 28. | 59 | | 174 | NOu. fort. | c. ſerein. |
| | 3. | 12. m. | 20 | 28. | 33 | —80 | 180 | calme. | brouill.c.ſerein, enſuite couv |
| | 4. | 8. m. | | 27. | 53 | | 149 | SOu. fort. | c. couv. neige. |
| | 5. | 3. m. | 24 | 27. | 96 | —78 | 165 | NOu. | ciel ſerein. |
| Févr. | 6. | 3. m. | 20 | 27. | 18 | +81 | 151 | SOu. fort. | neige, & ciel couvert. |
| | 6. | 11. s. | 37 | 27. | 99 | —80 | 165 | N. fort. | c. ſerein. |
| | 8. | 12. m. | 32 | 27. | 19 | +75 | 161 | SE. | neige, & ciel couvert. |
| | 9. | 8. s. | | 27. | 94 | | 185 | N. fort. | c. demi-couvert. |

## 3.) Variations ſubites & extraordinaires.

| Mois. | Temps jour | heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Févr. | 14. | 9. m. | 15 | 27. 96 | —34 | 165 | SOu. | ciel couvert. |
| | 14. | 12. s. | 46 | 27. 62 | +77 | 155 | SOu. | neige & c. couvert. |
| | 16. | 10. s. | 24 | 28. 39 | —39 | 166 | NE. | c. demi-couvert. |
| | 17. | 10. s. | | 28. 00 | | 154 | SOu. fort. | ciel couvert. |
| | 18. | 12. s. | 24 | 27. 95 | +62 | 150 | N. | neige, c. couvert. |
| | 19. | 12. s. | 34 | 28. 57 | —74 | 164 | NOu. fort | c. couvert, neige. |
| | 21. | 10. m. | | 27. 83 | | 150 | Ou. fort. | neige, c. couvert en partie. |
| | 22. | 3. m. | 20 | 28. 06 | —69 | 165 | NOu. | ciel ſerein. |
| | 22. | 11. s. | 25 | 27. 37 | +67 | 146 | SOu. fort. | neige, c. couvert. |
| | 23. | 12. s. | | 28. 04 | | 166 | Ou. | ciel ſerein. |
| | 24. | 12. s. | 12 | 28. 24 | —43 | 165 | SE. | ciel couvert en partie, neige. |
| | 25. | 12. m. | 12 | 27. 81 | +26 | 158 | E. ff. | neige, ciel couvert. |
| | 25. | 12. s. | 12 | 28. 07 | —28 | 160 | Ou. fort. | c. couvert. |
| | 26. | 12. m. | | 27. 79 | | 145 | Ou. | c. couvert, pluie. |
| Mars. | 3. | 6. m. | 21 | 28. 25 | —60 | 181 | N. | ciel ſerein. |
| | 4. | 3. m. | 36 | 27. 65 | +88 | 165 | E. fort. | c. couv. beaucoup de neige. |
| | 5. | 3. s. | 36 | 28. 53 | —101 | 172 | NE. | c. ſerein, enſuite couvert. |
| | 7. | 3. m. | 32 | 27. 52 | +86 | 155 | N. fort. | c. couv. neige, enſuite c. ſer. |
| | 8. | 11. m. | | 28. 38 | | 164 | NOu. | c. couvert. |
| | 10. | 6. s. | 42 | 27. 80 | +78 | 148 | SOu. | c. couvert. |
| | 12. | 12. m. | | 28. 58 | | 147 | SOu. fort. | ciel ſerein. |
| | 18. | 3. m. | 30 | 28. 16 | +57 | 152 | N. | c. couvert en partie. |
| | 19. | 9. m. | | 28. 73 | | 155 | NOu. | c. ſerein. |
| Avril | 8. | 2. s. | 24 | 28. 07 | +37 | 144 | calme. | c. couvert, pluie & neige. |
| | 9. | 2. s. | | 28. 44 | | 162 | NOu. | c. ſerein. |

## 3.) Variations ſubites & extraordinaires.

| Mois. | Temps jour. heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. 1/100 | Diff. 1/100 | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Avril | 15. 12. m. | 16 | 28. 42 | —50 | 148 | calme | c. ſerein, enſuite couvert. |
| | 16. 4. m. | | 27. 92 | | 149 | Ou. fort. | c. couvert, pluie & neige. |
| | 19. 3. s. | 42 | 28. 38 | —56 | 154 | NE. ff. | c. ſerein, enſuite couv. & neige |
| | 21. 9. m. | 48 | 27. 82 | +71 | 151 | NE. fort. | neige, c. couv. enſ. ſer. en partie |
| | 23. 9. m. | | 28. 53 | | 158 | calme | brouillard, enſuite c. ſerein. |
| Juill. | 17. 2. s. | 22 | 27. 89 | —47 | 118 | Ou. | c. en partie ſerein. |
| | 18. 12. m. | 48 | 27. 42 | +57 | 128 | NOu. fort. | c. couv. beaucoup de pluie. |
| | 20. 12. m. | | 27. 99 | | 122 | SOu. fort. | c. en partie ſerein, enſuite pluie forte & ciel couv. |
| Août. | 19. 4. m. | 20 | 27. 62 | +40 | 135 | Ou. fort. | pluie, ciel en partie couvert. |
| | 19. 12. s. | | 28. 02 | | 137 | Ou. | ciel ſerein. |
| Sept. | 14. 3. s. | 21 | 27. 72 | +27 | 132 | Ou. fort. | c. en partie couv. pluie & grele. |
| | 15. 12. m. | 8 | 27. 99 | —19 | 134 | SOu. fort. | ciel couvert, pluie copieuſe. |
| | 15. 8. s. | 13 | 27. 80 | +33 | 136 | SE. calme. | pluie, enſuite c. ſerein. |
| | 16. 9. m. | 15 | 28. 13 | —35 | 138 | E. | c. ſerein, brouillard. |
| | 16. 12. s. | | 27. 78 | | 132 | SE. fort. | c. demi-couv. éclairs, aur. bor. |
| | 19. 11. m. | 25 | 27. 66 | +64 | 133 | SOu. fort. | pluie & ciel couvert. |
| | 20. 12. m. | | 28. 30 | | 139 | NOu. | c. en partie ſerein. |
| | 24. 0. m. | | 28. 32 | | 139 | Ou. | c. ſerein, brouillard. |
| | 25. 0. m. | 28 | 28. 14 | —83 | 141 | SOu. fort. | c. en partie couvert. |
| | 26. 4. m. | 42 | 27. 31 | +96 | 140 | NOu. fort. | pluie, c. couvert. |
| | 27. 10. s. | | 28. 27 | | 151 | NOu. | c. en partie couvert. |
| | 29. 6. m. | 30 | 27. 92 | +50 | 148 | calme | brouillard, c. couv. pluie. |
| | 30. 12. m. | | 28. 42 | | 142 | Ou. | ciel ſerein. |

## 3.) Variations ſubites & extraordinaires.

| Mois. | Temps jour heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oct. | 16. 6. s. | 45 | 27. 16 | +82 | 142 | S. SOu. | c. en partie couv. enſuite pluie |
| | 18. 3. s. | 30 | 27. 98 | −56 | 147 | SOu. | ciel couvert. |
| | 19. 9. s. | | 27. 42 | | 149 | SE. | neige & pluie, c. couvert. |
| | 20. 8. m. | 16 | 27. 37 | +49 | 149 | NE. | neige & pluie, c. en part. couv. |
| | 20. 12. s. | 48 | 27. 86 | +61 | 148 | NE. | pluie, c. couvert. |
| | 22. 12. s. | | 28. 47 | | 149 | NE. | c. en partie couvert. |
| | 26. 8. s. | 39 | 28. 52 | −82 | 141 | S. SE. | c. couvert, enſuite neige. |
| | 28. 11. m. | | 27. 70 | | 149 | S. | neige & ciel couvert. |
| Nov. | 8. 3. s. | 33 | 28. 73 | −55 | 155 | SOu. | c. en part. couv. La riviere charia des glaces. |
| | 9. 12. s. | | 28. 18 | | 150 | Ou. fort. | neige, pluie, ciel couvert. |
| | 11. 10. m. | 44 | 28. 11 | +57 | 150 | S, N. | neige, c. couvert. |
| | 13. 6. m. | | 28. 68 | | 161 | N. | c. couvert. |
| | 13. 12. m. | 34 | 28. 68 | −55 | 163 | S. | c. en partie ſerein. |
| | 14. 10. s. | | 28. 13 | | 156 | SE. | c. couv. neige. La riviere fut priſe le lendemain. |
| | 23. 6. m. | 24 | 27. 47 | +67 | 149 | SOu. ff. | c. couvert, neige. |
| | 24. 6. m. | | 28. 14 | | 157 | NOu. | c. ſerein, enſuite couvert. |
| | 24. 12. m. | 28 | 28. 13 | −50 | 153 | NOu. | c. couvert, enſuite neige. |
| | 25. 4. s. | | 27. 63 | | 149 | SOu. | pluie, c. couvert. La riviere |
| | | 20 | | +54 | | | fut priſe pour la 2 fois. |
| | 26. 12. m. | 24 | 28. 17 | −55 | 155 | NOu. | c. ſerein. |
| | 27. 12. m. | 36 | 27. 62 | +92 | 149 | SE. ff. | c. couvert, pluie & neige. |
| | 28. 12. s. | | 28. 54 | | 158 | NE. calme. | ciel couvert. |
| | 29. 12. m. | | 28. 63 | | 161 | NE. | ciel ſerein. |



3.)

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

| Mois. | Temps. jour. | heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. | $\frac{1}{100}$ | Differ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Déc. | 1. | 0. m. | 34 | 28. | 62 | −50 | 162 | SE. calme. | c. couv. enſuite brouill. & neige |
| | 2. | 10. m. | | 28. | 12 | | 149 | SE. | c. couvert, pluie. |
| | 7. | 4. s. | 20 | 27. | 94 | −42 | 154 | Ou. NOu. | c. couvert. |
| | 8. | 12. m. | 22 | 27. | 52 | +36 | 152 | S. fort. | c. couvert & neige. |
| | 9. | 10. m. | | 27. | 88 | | 154 | SOu. | c. couvert. |
| | 10. | 8. m. | 19 | 27. | 80 | −43 | 153 | SOu. | c. couvert, pluie & neige. |
| | 11. | 3. m. | | 27. | 37 | | 151 | Ou. fort. | c. couvert. |
| | 11. | 3. s. | 20 | 27. | 47 | −51 | 152 | SOu. fort. | c. en partie couv. neige. |
| | 12. | 11. m. | 7 | 26. | 96 | +36 | 150 | Ou. ff. | de même. |
| | 12. | 6. s. | | 27. | 32 | | 156 | Ou. fort. | c. en partie ſerein. |
| | 14. | 6. m. | 27 | 27. | 66 | −61 | 163 | E. | c. ſerein, brouillard, c. couv. |
| | 15. | 9. m. | 15 | 27. | 05 | +42 | 150 | S. | beaucoup de neige, c. couv. |
| | 15. | 12. s. | | 27. | 47 | | 158 | SOu. fort. | c. couvert. |
| | 20. | 6. m. | 18 | 27. | 73 | +52 | 153 | calme. | beaucoup de neige, c. couv. |
| | 20. | 12. s. | | 28. | 25 | | 165 | | c. ſerein, brouillard. |

ff. indique que le vent a été très fort.

Les

Les déſcentes les plus conſidérables ont été, de $1\frac{1}{100}$ pouces en 36 heures le 6 Mars: de $\frac{93}{100}$ pouces, ou de $11\frac{1}{10}$ lignes en 27 heures le 5 Janvier, & de $\frac{8}{10}$ pouces, ou de $9\frac{2}{5}$ lignes en 20 heures le 3 Février. Les montées n'ont pas été auſſi ſubites: il y en a eu, de $\frac{92}{100}$ pouces, ou de 11 lignes en 36 heures le 27 Novembre: de $\frac{81}{100}$ pouces, ou de $9\frac{7}{10}$ lignes en 20 heures le 6 Février; enfin celles du 4 & du 7 de Mars. En géneral les variations du Baromètre on été les plus fortes dans les trois premiers & les quatre derniers mois de l'année.

## II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, avec leur différence, & l'état moyen du froid & de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1790.

| Mois. | Hauteurs extrêmes. Au plus bas Degré. | Au plus bas jour & heure. | Au plus haut Degré. | Au plus haut jour & heure. | Différence. Degré | Etat moyen. Froid moyen. Degré. | Etat moyen. Chaleur moyen. Degré. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 182 | le 25 à 10 h. s. | 145 | le 13 à 2 h. s. | 37 | 165,1 | 159,1 |
| Février | 188 | le 3 à 6 h. m. & le 10 à 10 h. s. | 144 | le 27 à 2 h. s. | 44 | 168,2 | 158,4 |
| Mars | 184 | le 5 à 6 h. m. | 141 | le 23 à 2 h. s. | 43 | 160,6 | 150,8 |
| Avril | 174 | le 4 à 7 h. m. | 138 | le 30 à 2 h. s. | 36 | 161,7 | 149,5 |
| Mai | 153 | le 17 à 6 h. m. | 121 | le 21 à 2 h. s. | 32 | 142,4 | 132,0 |
| Juin | 145 | le 1 à 6 h. m. | 116 | le 11 à 2 h. s. | 29 | 132,3 | 125,0 |
| Juillet | 138 | le 6 à 7 h. m. | 115 | le 31 à 3 h. s. | 23 | 130,8 | 124,5 |
| Août | 145 | le 23 à 6 h. m. | 117 | le 5 à 2 h. s. | 28 | 133,5 | 125,6 |
| Sept. | 155 | le 28 à 6 h. m. | 130 | le 16 à 2 h. s. | 25 | 141,2 | 134,6 |
| Octobr. | 153 | le 31 à 10 h. s. | 133 | le 6 à 3 h. s. | 20 | 147,1 | 142,6 |
| Novem. | 165 | le 29 & le 30 à 10 h. s. | 147 | le 22 à 3 h. s. | 18 | 155,5 | 152,0 |
| Décem. | 165 | le 20 à 9 h. s. | 146 | le 3 à 3 h. s. | 19 | 156,1 | 152,0 |

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

| Mois. | Le froid a été plus grand que | | | | | | La chaleur a été plus grande que | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 180 jours. | 170 jours. | 160 jours. | 150 jours. | 140 jours. | 130 jours. | 120 jours. | 130 jours. | 140 jours. | 150 jours. | 160 jours. | 170 jours. |
| Janv. | 2 | 11 | 22 | 29 | 31 | 31 | | | | 8 | 16 | 27 |
| Févr. | 6 | 8 | 22 | 27 | 28 | 28 | | | | 6 | 18 | 23 |
| Mars | 3 | 6 | 15 | 27 | 31 | 31 | | | | 20 | 26 | 30 |
| Avril | | 6 | 17 | 30 | 30 | 30 | | | 2 | 16 | 28 | 30 |
| Mai | | | | 5 | 18 | 31 | | 15 | 27 | 31 | 31 | 31 |
| Juin | | | | | 2 | 22 | 3 | 29 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| Juillet | | | | | | 22 | 4 | 27 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Août | | | | | 2 | 23 | 5 | 25 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Sept. | | | | 3 | 14 | 30 | | | 26 | 30 | 30 | 30 |
| Oct. | | | | 10 | 31 | 31 | | | 10 | 31 | 31 | 31 |
| Nov. | | | 7 | 26 | 30 | 30 | | | | 12 | 28 | 30 |
| Déc. | | | 6 | 29 | 31 | 31 | | | | 7 | 31 | 31 |
| Année. 1790. | 11 | 31 | 89 | 186 | 248 | 340 | 12 | 96 | 157 | 253 | 331 | 355 |
| du 1 Nov. 1789. au 1 May 1790. | 12 | 39 | 90 | 146 | 181 | 181 | | | 6 | 91 | 139 | 169 |
| du 1 May au 1 Nov. 1790. | | | | 18 | 67 | 159 | 12 | 96 | 155 | 184 | 184 | 184 |

Il n'y a eu cette année ni des grands froids ni des ſortes chaleurs. L'hyver de 1789 à 1790 a été extraordinairement doux, & l'été de 1790, froid & humide.

Le plus grand froid a été de 188°, ou de $20\frac{1}{3}$ degrés d'après Réaumur, le 3 Février à 6 heures matin: Baromètre 28. 28, calme, brouillard & ciel ſerein: de même le 10 Février à 10 heures du ſoir, Barom. 27. 95. vent du Nord, ciel en partie couvert.

La plus grande chaleur de 115°, ou de $18\frac{2}{3}$ degrés d'après Réaumur, a été obſervée le 31 Juillet à 3 heures après-midi, Baromèt. 28. 09. ciel en partie couvert & un vent fort du Sud.

La différence entre ces deux températures extrèmes eſt = 73° de Délisle, qui fort 39 degrés de Réaumur.

Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques, obſervées à 6 heures du matin & à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Février, & le plus petit en Juillet. Sa valeur pour toute l'année eſt = 149°, 4

Pour l'hyver de 1789 à 1790, ce froid moyen eſt
depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790 = 160°, 6 &
depuis le 1 Décembre 1789 jusqu'au 1 Avril 1790 = 162°, 4

Enſuite pour les ſix mois d'été ſuivans, ou
depuis le 1 Mai 1790, jusqu'au 1 Novembre = 137°, 9

De

De même la chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 heures après-midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet & la plus petite en Janvier. Elle a été pour toute l'année $= 141°, 9$, & pour l'Été de 1790

depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre $= 130°, 7$
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre $= 127°, 4$

Et pour les ſix mois de l'hyver paſſé ou
depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790 $= 152°, 5$

3.) Énumération détaillée des froids, pendant l'hyver de 1789 à 1790, ou depuis le 1 Novembre 1789 jusqu'au 1 Mai 1790, ce qui fait un intervalle de 181 jours d'hyver.

Le froid a ſurpaſſé 180 degrés en 12 jours, le 2 Décembre 1789, le 25. 26 Janvier 1790, le 1. 2. 3. 9. 10. 11 Février, & le 2. 3. 5. Mars.

Le froid a été entre

| | | jours |
|---|---|---|
| 170 & 180 | le 24 — 26. 29. 30 Novembre, le 1. 3 Décembre, le 8. 9. 16. 17. 24. 27. 28. 30. 31 Janvier, le 12. 13 Février, le 1. 4. 8 Mars, & le 3 — 5. 9 — 11 Avril - - - - - - - | 27 |
| 160 & 170 | le 23. 28 Novembre, le 10. 11. 13. 14 Décembre, le 3 — 7. 11. 15. 21 — 23. 29 Janvier, le 4 — 8. 14. 16. 17. 19. 20. 22 — 25 Févr. le 6. 7. 16. 19. 26 — 30 Mars, & le 1.2. 6. 8. 12. 13. 15. 19. 22 — 24 Avril - - - - - | 51 |
| 150 & 160 | le 1. 13. 22. 27 Novembre, le 4 — 7. 9. 12. 15. — 19. 24. 27. 30. 31 Décembre, le 1. 2. 10. 14. 18 — 20 Janv. le 15. 18. 21. 26. 28 Février, le 9. 10. 12. 14. 15. 18. 20. 21. 23 — 25. 31 Mars, & le 7. 14. 16 — 18. 20. 21. 25 — 30 Avril - | 56 |

En 35 jours il n'a gélé point du tout: mais il avoit déja gélé au mois d'Octobre 1789, ſavoir le 19. 20. 21. 25. 29 & 30 Octobre, & il y avoit encore eu des gélées au mois de Mai 1790, le 1. 10. 16. 17. 18.

L'Intervalle entre la premiere gélée du 19 Octobre 1789 & la derniere gélée du 18 Mai 1790, eſt de 221 jours.

4.)

4.) Énumération détaillée des chaleurs pendant l'été de 1790; c'eſt à dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1790: ce qui fait un intervalle de 184 jours d'été.

La chaleur a été en 12 jours plus grande que 120, le 11. 12. 27 Juin, le 17. 21. 30. 31 Juillett & le 1. 4 — 7 Août.

La chaleur a été obſervée entre

| | | |
|---|---|---|
| 130 & 120 | le 2 — 8. 19 — 26 Mai, le 2 — 10. 13 — 26 28 — 30 Juin, le 1 — 3. 8 — 16. 18 — 20 22 — 29 Juillet, & le 2. 3. 8 — 12. 15 — 18 20. 21. 24 — 30 Août - - - | jours 84 |
| 140 & 130 | le 1. 9. — 11. 13 — 15. 18. 27 — 29. 31 Mai, le 1 Juin, le 4 — 7 Juillet, le 13. 14. 19. 22. 23. 31 Août, le 1 — 26 Septembre & le 1 — 10 Octobre - - - - | 59 |
| 150 & 140 | le 12. 16. 17. 30 May, le 27 — 30 Septembre, & le 11 — 31 Octobre - - | 29 |

Il n'y a donc eu aucun jour, où il eut gelé continuellement: & déja en Avril il y a eu 2 jours des chaleurs plus grandes que de 140°, ſavoir le 29 & 30.

La derniere gélée a été de 151° le 18 Mai matin. Baromètre 28. 28, temps calme & ciel ſerein.

Il recommença à géler le 27 Septembre matin, le Thermomètre fut à 151°: Baromètre 27. 92. Vent NOu, ciel en partie couvert: mais cette gélée ne dura que jusqu'au 30 Septembre, le temps ſe remit au chaud, & les gélées ne revinrent que le 18 Octobre au ſoir.

L'Intervalle entre la derniere gelée & la premiere n'eſt donc que de 132 jours. Mais ſi l'on compte jusqu'au 18 Octobre: cet intervalle eſt de 153 jours.

## III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1790.

| Mois. | Calme | Vent doux | Vent fort | Vent très fort | Nord. | NE. | Eſt. | SE. | Sud. | SOu. | Oueſt. | NOu. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. |
| Janv. | 1 | 18 | 11 | 1 | 9 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 1 | 7 |
| Févr. | 3 | 11 | 12 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 8 | 7 | 0 |
| Mars | 2 | 21 | 8 | 0 | 5 | 5 | 1 | 0 | 1 | 8 | 3 | 8 |
| Avril | 5 | 14 | 7 | 4 | 7 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 |
| Mai | 8 | 12 | 9 | 2 | 1 | 9 | 5 | 0 | 5 | 7 | 4 | 0 |
| Juin | 4 | 15 | 9 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 4 | 2 | 12 | 9 |
| Juillet | 2 | 17 | 11 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 | 9 | 8 | 1 |
| Août | 8 | 16 | 6 | 1 | 1 | 2 | 6 | 3 | 2 | 4 | 10 | 3 |
| Sept. | 5 | 15 | 8 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 9 | 7 | 6 |
| Oct. | 3 | 21 | 7 | 0 | 2 | 5 | 2 | 2 | 5 | 11 | 3 | 1 |
| Nov. | 10 | 14 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 7 | 4 | 7 | 6 | 2 |
| Déc. | 8 | 12 | 10 | 1 | 0 | 0 | 6 | 6 | 4 | 7 | 5 | 3 |
| Année 1790. | 59 | 186 | 102 | 18 | 32 | 47 | 28 | 26 | 36 | 79 | 68 | 49 |
| du 1 Nov. 1789. au 1 May. 1790. | 13 | 102 | 55 | 11 | 34 | 24 | 10 | 7 | 13 | 47 | 18 | 28 |
| du 1 May au 1 Nov. 1790. | 30 | 96 | 50 | 8 | 6 | 22 | 17 | 10 | 23 | 42 | 44 | 20 |

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages : tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1790.

| Mois. | Degré de Force. | Rapp. des quatre plages. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Nord | Eſt | Sud | Oueſt. |
| Janvier | 287 | 13 | 3 | 7 | 8 |
| Février | 317 | 6 | 5 | 6 | 11 |
| Mars | 245 | 12 | 3 | 5 | 11 |
| Avril | 310 | 17 | 6 | 0 | 7 |
| Mai | 271 | 5 | 10 | 8 | 8 |
| Juin | 286 | 5 | 2 | 5 | 18 |
| Juillet | 284 | 3 | 4 | 11 | 13 |
| Août | 232 | 4 | 8 | 6 | 13 |
| Septembre | 277 | 5 | 3 | 8 | 14 |
| Octobre | 235 | 5 | 6 | 11 | 9 |
| Novembre | 233 | 3 | 5 | 11 | 11 |
| Décembre | 258 | 2 | 9 | 10 | 10 |
| Année 1790. | 270 | 80 | 64 | 88 | 133 |
| du 1 Nov. 1789. au 1 Mai 1790. | 290 | 60 | 25 | 40 | 56 |
| du 1 Mai au 1 Nov. 1790. | 264 | 27 | 33 | 49 | 75 |

 Le

Le mois de Février a donc été le plus venteux, & ceux d'Août, de Novembre & d'Octobre les plus calmes. L'hyver de 1789 au 1790 a été plus venteux que l'été de 1790.

Le vent dominant fut celui de l'Oueſt, & ſpécialement celui du SOu. Mais pendant l'hyver de 1789 à 1790 ce fut celui du Nord.

## 3.) Direction des vents forts.

| Direction | Jours & Mois. | Nombre de jours |
|---|---|---|
| Nord. | Le 20 Janv. le 6. 9 Fevr., le 7 Mars, le 3. 4. 5. 18 Avril, le 6 Juillet, & le 14 Août - - | 10 |
| NE. | Le 31 Janvier, le 1. 26 Mars, le 12. 14. 19. 20. 21 Avril, le 8. 9. 11. 16. 17. 30. 31 Mai, le 2 Juin, le 3. 4. 5 Juillet, & le 28 Nov. - | 20 |
| Eſt. | Le 30 Janv. le 25. 28 Février, le 4 Mars, le 22 Mai, le 18 Juillet, & le 8. 12 Août - - | 8 |
| SE. | Le 6 Août, le 21 Sept., le 19 Octobre, le 22. 27 Novembre, & le 2 Décembre - - - | 6 |
| Sud. | Le 27 Janv. le 6 Mai, le 12. 27 Juin, le 31 Juillet, le 22 Sept., le 13 Octobre, & le 8. 15. 22 Décembre - - - - - - - - - - | 10 |
| SOu. | Le 1. 5. 13 Janv. le 4. 5. 17. 20. 22 Févr. le 6. 12. 13. 29 Mars, le 17. 26 Juin, le 14. 19. 20. 24. 25 Juillet, le 17 Août, le 4. 11. 25 Sept. le 5. 10. 15. 16 Oct. le 18. 23 Novembre, & le 10. 15. 21. 25. 26. 31 Décembre - - | 35 |
| Oueſt. | Le 4 Janvier, le 1. 18. 21. 23. 26 Février, le 16 Avril, le 13. 27 Mai, le 18. 19 Juin, le 28 Juillet, le 2. 19 Août, le 7. 13. 14 Septbr. le 17 Oct. le 9 Nov. & le 11. 12 Déc. - | 20 |
| NOu. | Le 14. 15. 17. 19 Janv. le 7 Avril, le 13. 25. 29. 30 Juin, le 19. 26 Septembre - - - | 11 |
| | Somme | 120 |

Parmi

Parmi ces 120 jours de vents forts ont été les plus orageux.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ceux du 3. 4 Avril & du 6 Juillet. | Direction | *Nord.* | Nombre | 3. |
| du 19. 20 Avril, du 9 & 16 Mai | —— | *NE.* | —— | 4. |
| du 25. 28 Févr. & du 12 Août | —— | *Eſt.* | —— | 3. |
| du 27 Novembre - - - | —— | *SE.* | —— | 1. |
| du 27 Juin, & du 22 Septembre | —— | *Sud.* | —— | 2. |
| du 5 Janv. du 26 Juin & du 23 Novembre - - - - | —— | *SOu.* | —— | 3. |
| du 12 Décembre - - - | —— | *Oueſt.* | —— | 1. |
| du 19 Septembre - - - | —— | *NOu.* | —— | 1. |

IV.

## IV. Atmoſphère.

| Mois. | Ciel. ſerein jours. | Ciel. couvert jours | Brouillard jours. | Pluie. forte jours. | Pluie. petite jours. | Neige. forte jours. | Neige. petite jours. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 4 | 10 | 1 | | 5 | | 15 |
| Février | 2 | 11 | 2 | | 4 | | 14 |
| Mars | 13 | 3 | 4 | | 3 | 1 | 4 |
| Avril | 10 | 7 | 4 | | 2 | 1 | 7 |
| Mai | 15 | 6 | 2 | 1 | 6 | | 2 |
| Juin | 9 | 4 | 0 | 1 | 12 | | |
| Juillet | 4 | 8 | 0 | 9 | 14 | | |
| Août | 3 | 3 | 4 | 6 | 16 | | |
| Septemb. | 3 | 5 | 5 | 5 | 18 | | |
| Octobre | 1 | 18 | 3 | | 17 | | 8 |
| Novemb. | 3 | 19 | 4 | | 7 | | 12 |
| Décemb. | 1 | 22 | 7 | | 5 | 3 | 10 |
| Année 1790. | 68 | 116 | 36 | 22 | 109 | 5 | 72 |
| | | | | 131 | | 77 | |
| du 1 Nov. 1789. au 1 May. | 32 | 68 | 15 | 0 | 34 | 4 | 56 |
| | | | | 34 | | 60 | |
| du 1 May. 1790. au 1 Nov. | 35 | 44 | 14 | 22 | 83 | 0 | 10 |
| | | | | 105 | | 10 | |

Le nombre des jours ſereins a été extraordinairement petit: & celui des jours de pluie très grand. Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ainſi dans un intervalle de 184 jours, il n'y a eu que 79 jours, où il n'eut plu, & parmi ceux-ci il n'y a eu que 35 de ciel entièrement ſerein.

La derniere neige tomba le 30 Mai, & il recommença à neiger le 19 Octobre, après un intervalle de 142 jours.

La Neva débacla dans la nuit du 1 au 2 Mai, après avoir été gelée pendant 157 jours (*). Elle charia enſuite les glaces du Ladoga le 11. 12. 13 & 14, le 17 en grande abondance & enſuite en diminuant jusqu'au 21 Mai.

La riviere recommença à former & à charier des glaces le 8 Novembre, & elle fut priſe deux fois I.) le 15 au ſoir (**) après avoir été ouverte pendant 198 jours. Elle reſta dans cet état de priſe jusqu'au 17 au ſoir, où la glace repartit. La Neva en charia le 19, 23, & le 24 en ſi grande abondance, qu'il étoit impoſſible de la paſſer avec des bâteaux. Enfin II.) le 25 à 1 h. après midi (***), elle fut repriſe pour la ſeconde fois, 10 jours après ſa premiere priſe & 208 jours après ſon débacle en Mai.

Il

(*) Thermomètre de Délisle 146 à 148. Baromètre 28. 28. Ciel ſerein & calme.

(**) Thermomètre 150 à 155. Baromètre 27. 00. Vent de l'Oueſt ciel couvert. On ne put paſſer la riviere ni le 16 ni le 17.

(***) Le Thermomètre n'étant qu'au 149 degré. Baromètre 27. 64. Vent du Sud, ciel couvert & pluie.

Il gréla cinq fois le 26 Janvier, le 20 Mai, le 12 & 30 Août, & le 14 Septembre.

Le nombre des orages ne monte qu'à quatre: le 27 Juin il y en eut un fort: les autres trois plus foibles furent le 7 Juin, le 11 Juillet & le 12 Août. Des éclairs de nuit, le 7 Août & le 5 Septembre.

Il n'y eut que quatre aurores boreales d'obſervées, le 1 Mai, le 16 & 30 Sept. & le 4 Octobre, dont aucune n'a été bien forte.

Mais un parhélie d'autant plus complet & de toute beauté fut obſervé le 29 Juin. La déſcription de ce phénomène faite par M. Lowitz ſe trouve ci-deſſûs pag. 384.

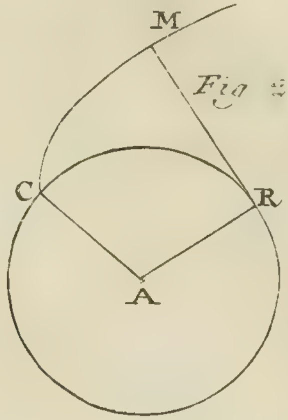



Fig. 2.

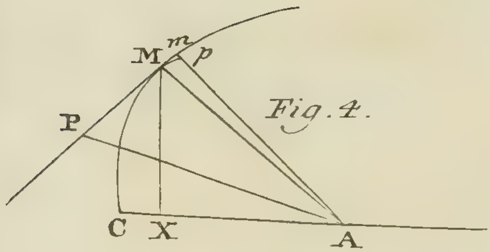



Fig. 4.

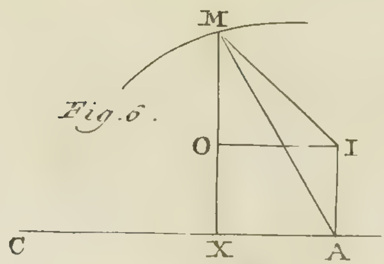



Fig. 6.

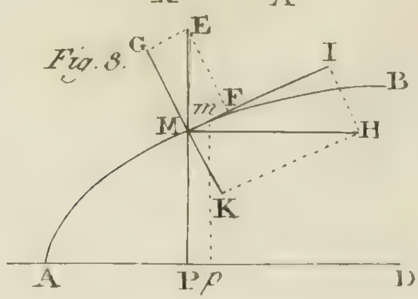



Fig. 8.

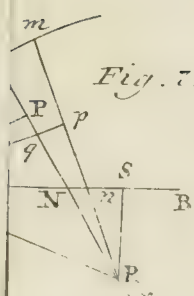



Fig. 7.

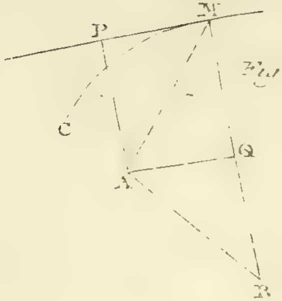



Fig. 1

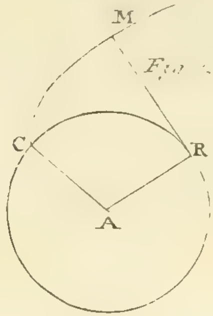



Fig. 2

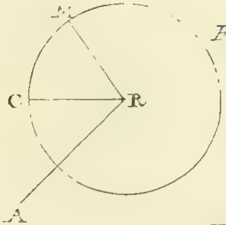



Fig. 3.

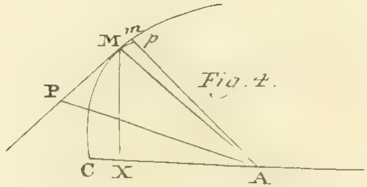



Fig. 4.

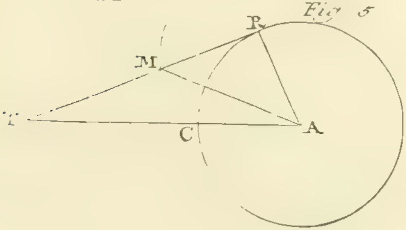



Fig. 5

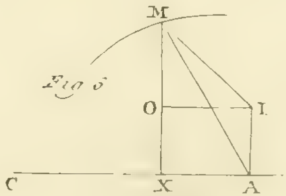



Fig. 6

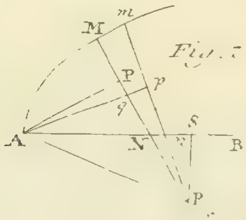



Fig. 7

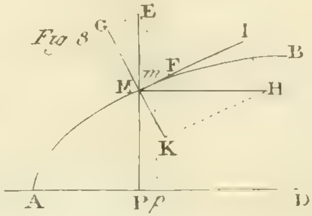



Fig. 8

Fig. 5.

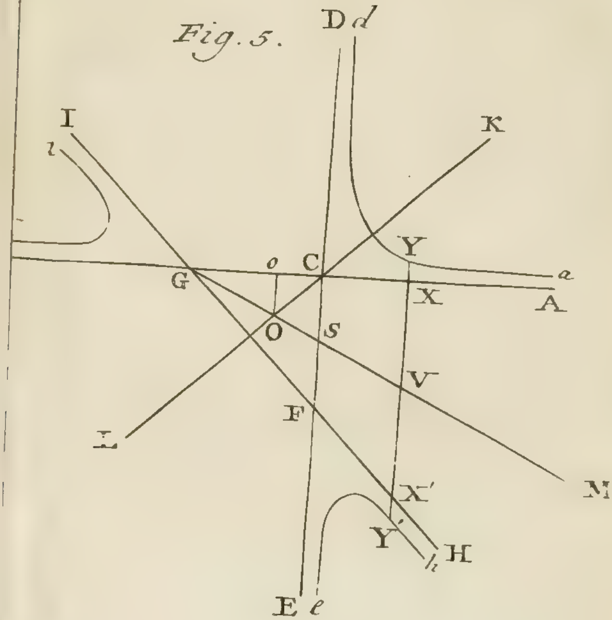
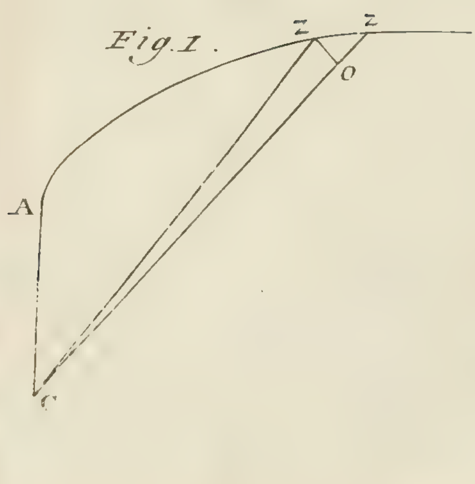



Fig. 1.



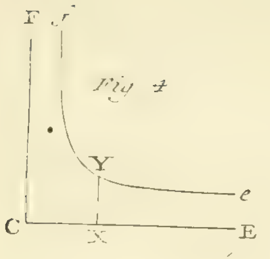


Fig. 4.

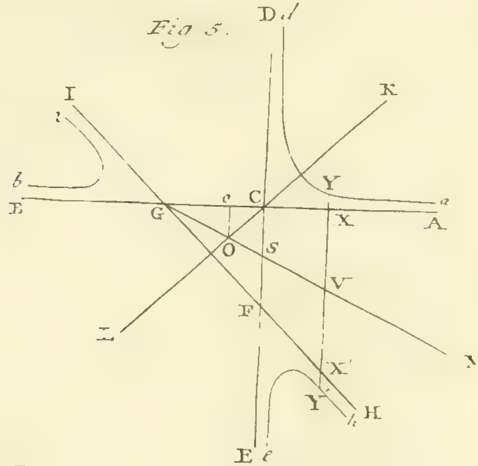


Fig. 5.

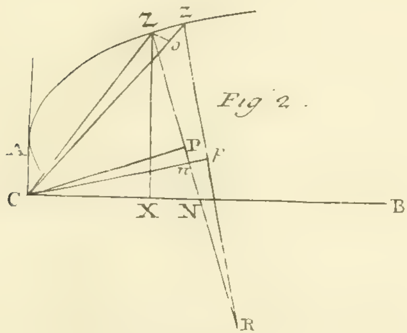


Fig. 2.

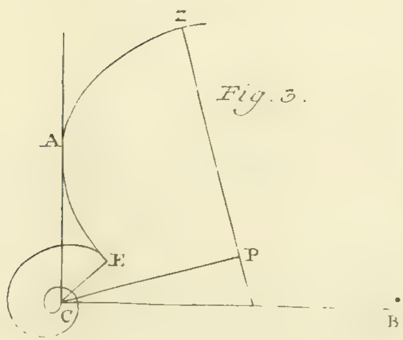


Fig. 3.

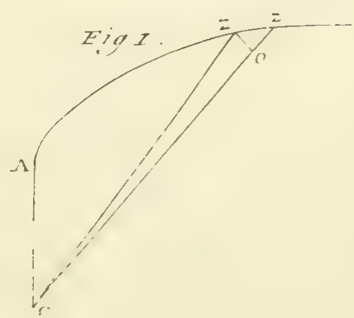


Fig. 1.

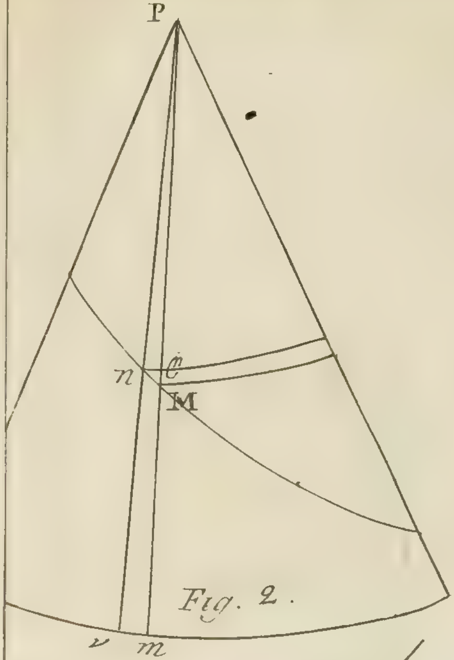



Fig. 2.

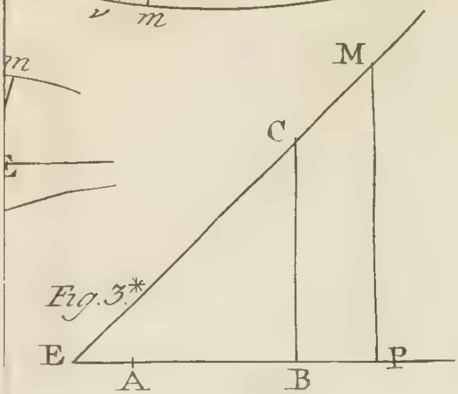



Fig. 3.*

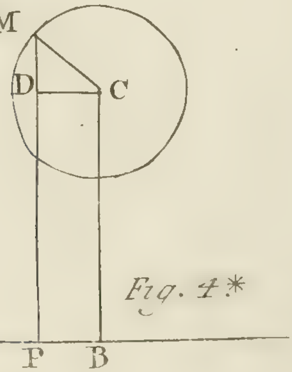



Fig. 4.*

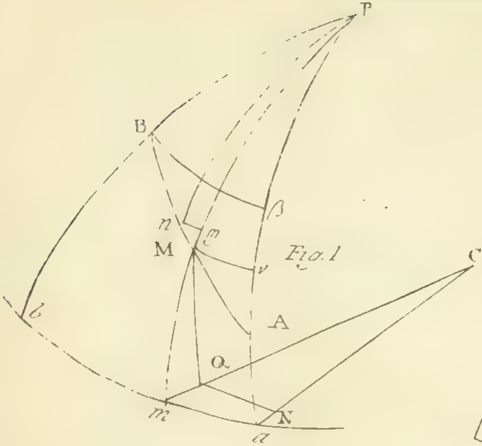



Fig. 1

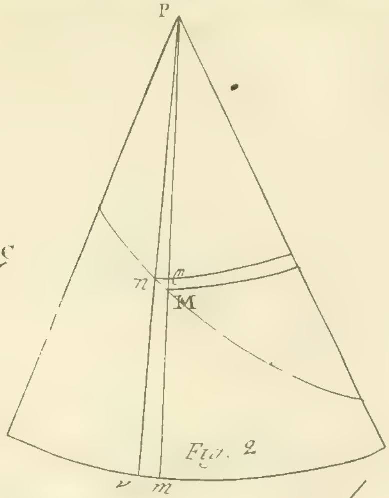



Fig. 2

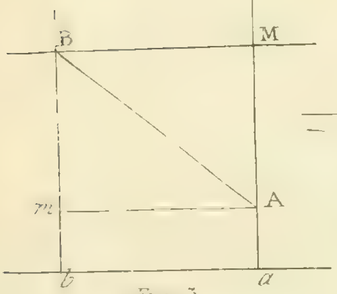



Fig. 3.

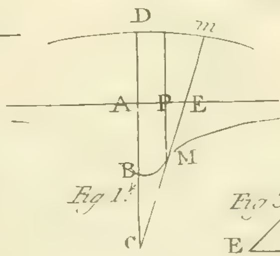



Fig. 1.*

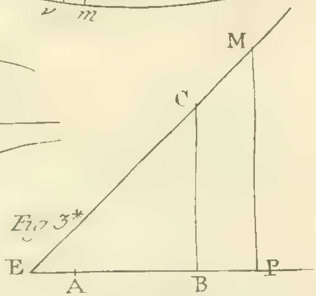



Fig. 3*

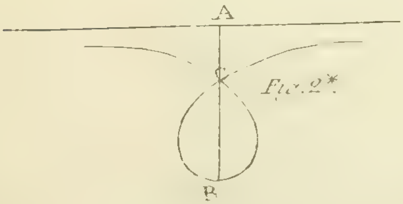



Fig. 2*.

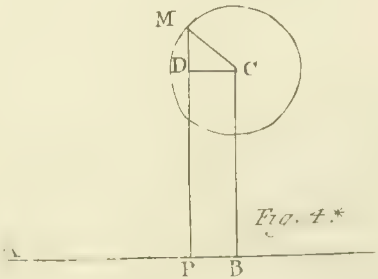



Fig. 4.*

Fig. 2.

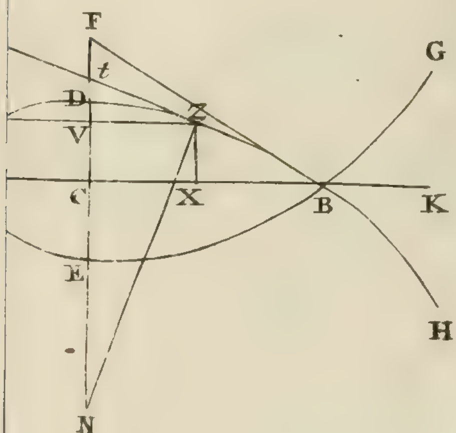



Fig. 4.

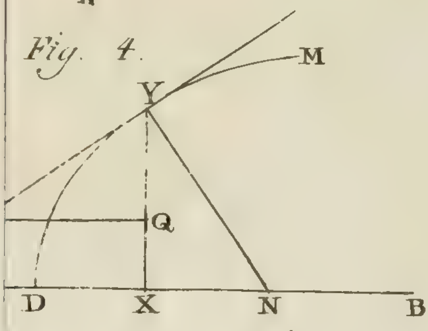



Fig. 6.

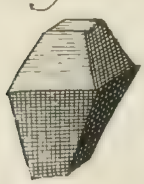


*Fig. 1.*

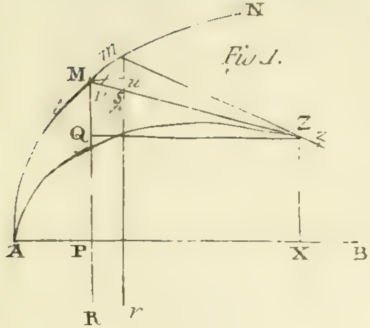



*Fig. 2*

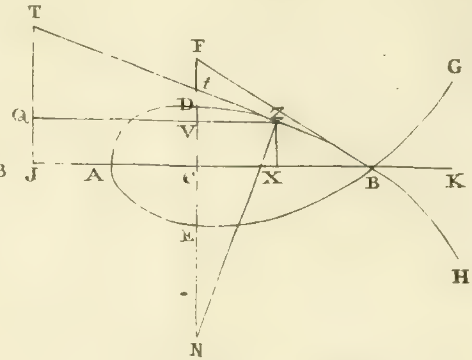



*Fig. 3.*

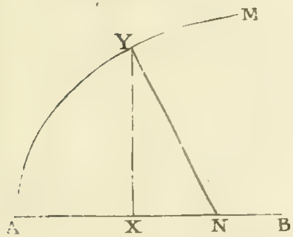
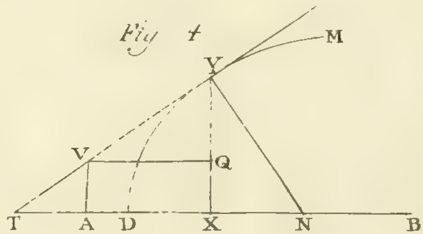



*Fig. 4*

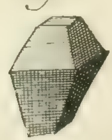



*ad Fig. II.*

*Fig. 5*



*Fig. 6.*



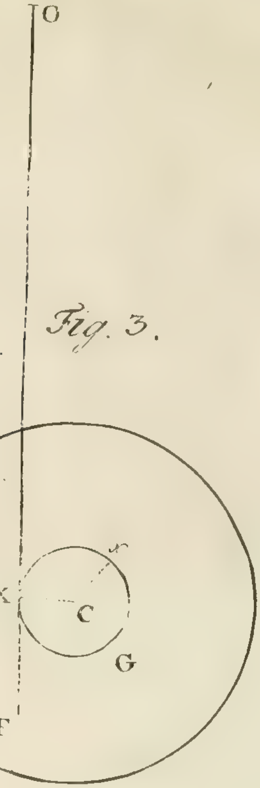



Fig. 3.

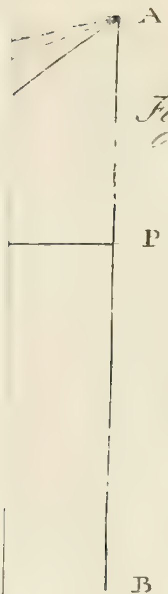



Fig. 4.

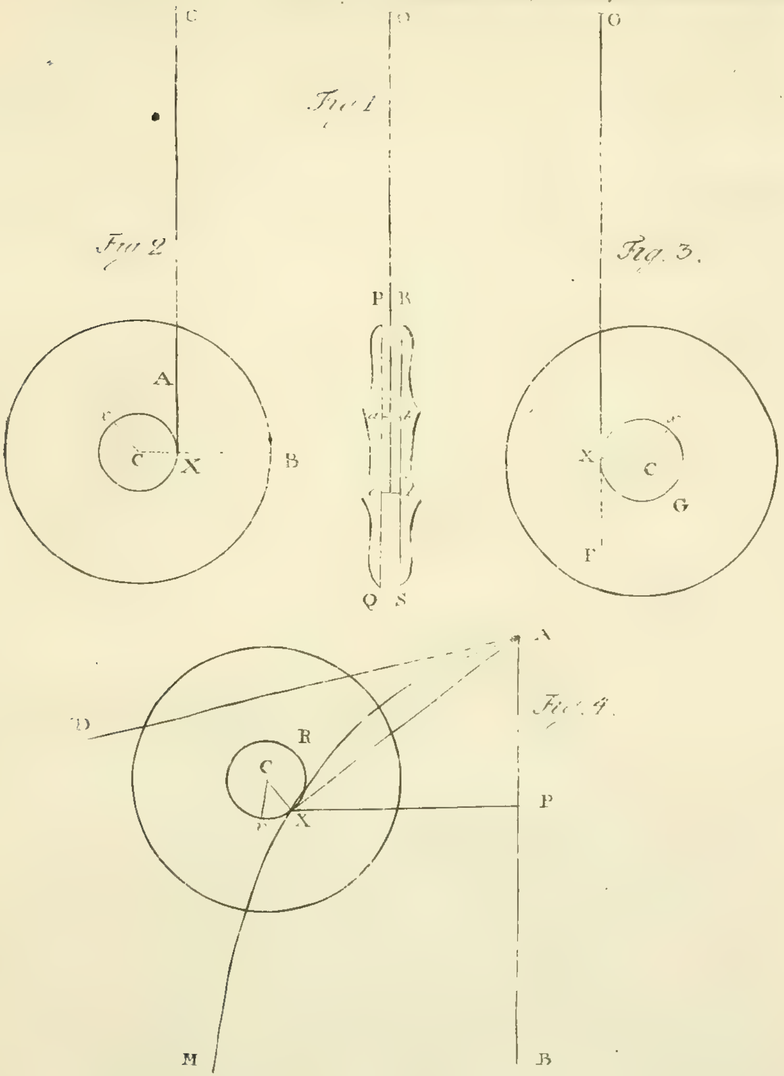

Fig. 1
P
R
Q
S
Fig. 2
A
C
X
B
Fig. 3
O
X
C
G
F
Fig. 4
A
D
R
C
X
P
M
B



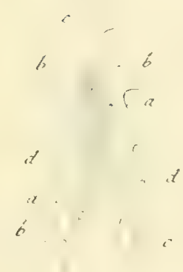








Fig. 2



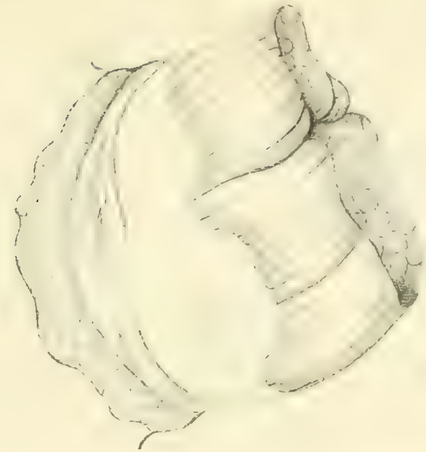
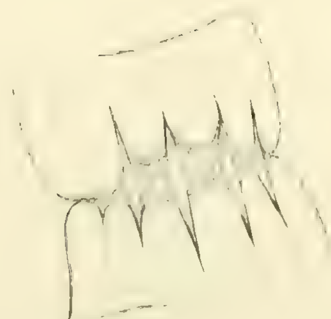






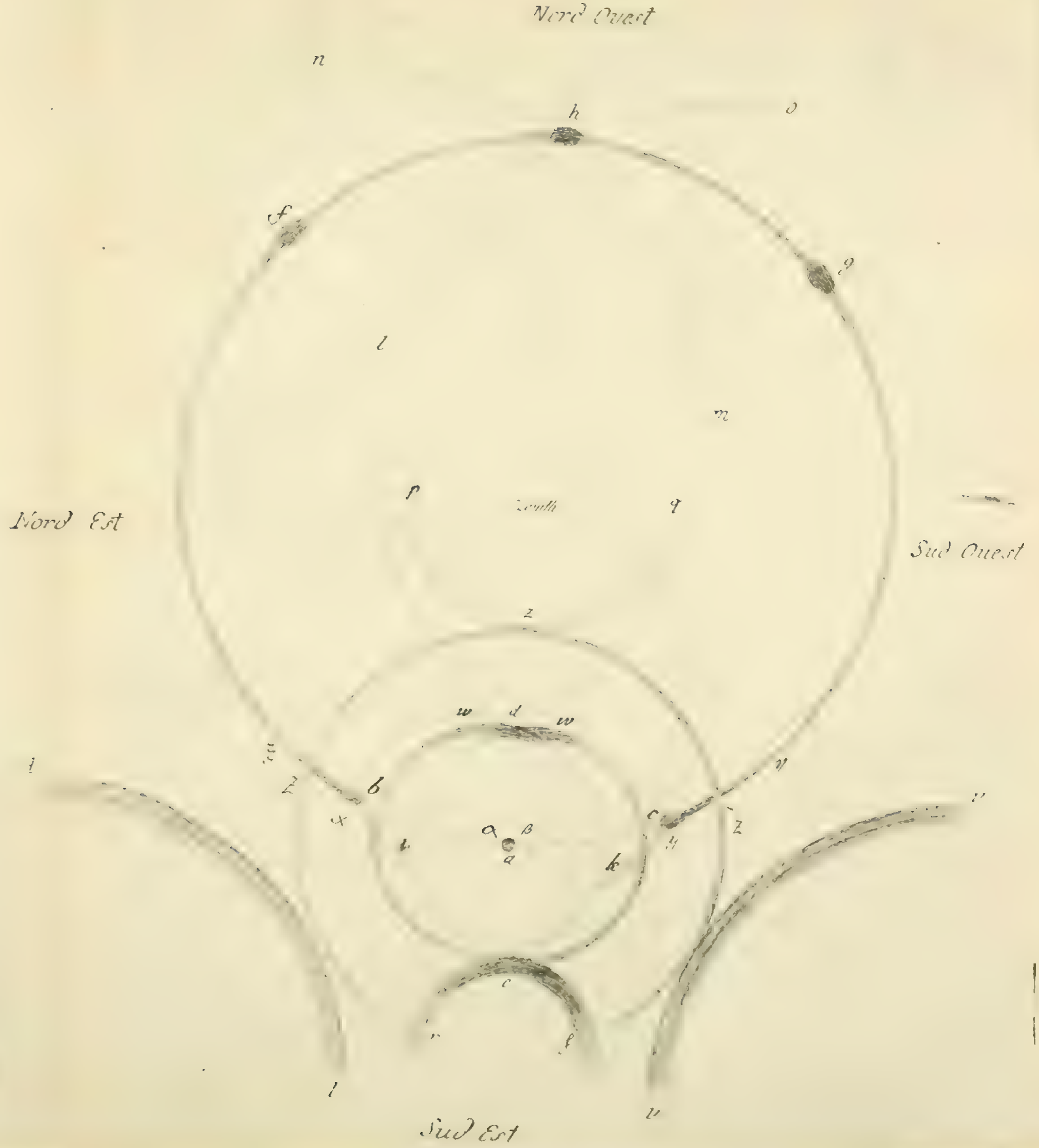
Fig. 4.








Ouest
o
g
m
q
Sud Ouest
n
c
y
z
k
v
v


Nord Ouest
Nord Est
Sud Ouest
Sud Est
n
h
o
f
g
l
m
p
q
z
w
d
w
b
c
a
k
e
l
v

de l'Académie Imp. des Sciences A: 1790.





AMNH LIBRARY
100127226